Asignación dinámica de cartera para MÚLTIPLES PERIODOS

LUIS NAPA*, JORGE RODRÍGUEZ**
Y MARCELO RONDOY***

El artículo presenta un método de asignación dinámica de carteras basado en la gestión patrimonial orientada a objetivos (*goal-based wealth management*). Este enfoque optimiza las inversiones para alcanzar metas financieras a largo plazo, utilizando programación dinámica. El análisis de los retornos de grandes empresas estadounidenses muestra que este modelo aumenta la probabilidad de alcanzar objetivos financieros, adaptándose a diversas metas y condiciones de mercado, lo que mejora la gestión del riesgo y el rendimiento de las inversiones.

* Especialista, Departamento de Gestión de Portafolios Líquidos del BCRP
luis.napa@bcrp.gob.pe

** Especialista, Departamento de Gestión de Portafolios de Inversión del BCRP
jorge.rodriguez@bcrp.gob.pe

*** Especialista, Departamento de Gestión de Portafolios Líquidos del BCRP
marcelo.rondoy@bcrp.gob.pe

La gestión patrimonial basada en objetivos (*goal based wealth management,* GBWM) es una estrategia para administrar las inversiones de un individuo enfocándose en alcanzar metas financieras a largo plazo; asimismo, a diferencia de las estrategias tradicionales, intenta equilibrar el riesgo y el rendimiento. En dicho sentido, este artículo, se centra en la programación dinámica para la GBWM, una metodología óptima para alcanzar objetivos a largo plazo y, al mismo tiempo, mejorar la relación entre riesgo y retorno. La GBWM se basa en la teoría del comportamiento de Shefrin (2000) y ha sido desarrollada y adoptada por varios expertos, como Nevins (2004) y Chhabra (2005). Este enfoque también considera la teoría de la perspectiva de Kahneman (1979), que modela cómo las personas realmente toman decisiones, y la teoría de la contabilidad mental (Thaler, 1999), que sugiere que las personas tienen diferentes actitudes hacia el riesgo dependiendo de sus objetivos específicos.

COMBINACIÓN DE IDEAS PARA UN ENFOQUE ÓPTIMO

En esta estrategia, el riesgo se define como la probabilidad de no alcanzar el objetivo financiero del inversor. Este concepto alternativo de riesgo significa que, en algunos casos, para aumentar la probabilidad de que el inversor alcance su objetivo, es necesario incrementar el riesgo tradicional de la cartera, medido como la desviación estándar. El objetivo de la estrategia de inversión es determinar una asignación dinámica de cartera, tal que las carteras elegidas en cada período de reequilibrio estén en la frontera eficiente de media-varianza tradicional y maximicen la probabilidad de lograr el objetivo de riqueza G [1] en el horizonte temporal t.

En este artículo se sigue la estrategia GBWM (Das et al., 2020) que representa el objetivo como:

$$\max_{[A(0),A(1),\ldots,A(T-1)]} \mathbb{P}(W(t) \geq G)$$

Donde $W(t)$ es la riqueza terminal de la cartera y $A(t)$ son las posibles acciones y asignaciones en el momento $t = 0,1,\ldots,T-1$.

El problema de la cartera dinámica consta de las siguientes partes:

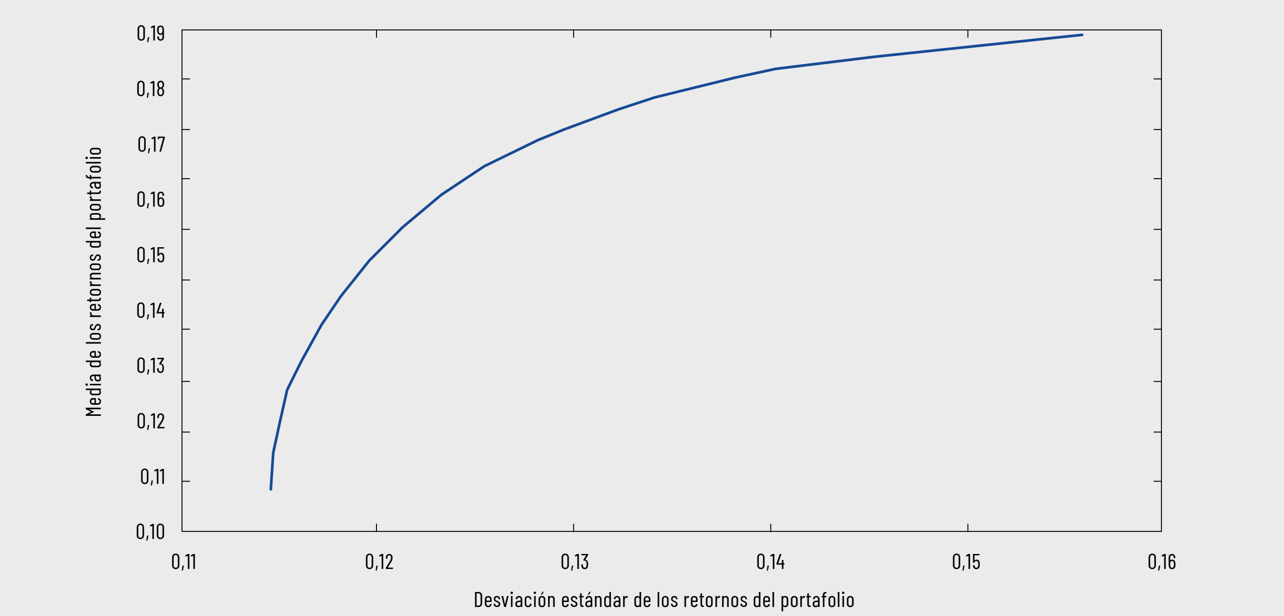
- Períodos de tiempo: períodos de reequilibrio de la cartera
- Acciones: reequilibrio de ponderaciones de cartera
- Estados: niveles de riqueza
- Función de valor: probabilidad de lograr el objetivo al final del período de inversión
- Política o estrategia: acciones óptimas en cada estado y período de tiempo

Para este artículo, se analizaron los retornos mensuales de las 28 empresas más grandes y representativas de Estados Unidos que cotizan en la Bolsa de Valores de Nueva York (NYSE) y en el Nasdaq para el periodo de enero de 2014 a julio de 2024.

ACCIONES DEL PERÍODO DE REEQUILIBRIO PARA CARTERAS EFICIENTES

La acción en cada período de reequilibrio es elegir las ponderaciones de la cartera de inversiones para el siguiente período. En este estudio, se supone que las posibles ponderaciones de la cartera están asociadas con las carteras en la frontera eficiente. Este ejemplo

GRÁFICO 1 | Frontera eficiente



1 Para el presente artículo se tomó como nivel objetivo de riqueza $G = 200$ y como riqueza inicial W_0=100, mientras que para el análisis se consideró un horizonte temporal $T = 10$.

también implica que la elección de posibles carteras es fija durante todo el período de inversión. Sin embargo, no es necesario que los pesos estén en la frontera eficiente. El único requisito es que el conjunto de acciones (elecciones de cartera) permanezca fijo durante todo el período de inversión.

ESTADOS PARA NODOS DE RIQUEZA

Los estados se definen como los valores de riqueza en el momento t. Para simplificar el problema, discretizamos los valores de riqueza para generar una cuadrícula de riqueza W_i para $i\epsilon\{1,\dots,i_{max}\}$. $W_{i_{min}}$ corresponde a la menor riqueza posible (W_{min}), y $W_{i_{max}}$ corresponde a la mayor riqueza posible (W_{max}). Para determinar W_{min} y W_{max}, se supone que la evolución de la riqueza sigue un movimiento browniano geométrico (GBM):

$$W(t) = W(0)e^{\left(\frac{\mu-\sigma^2}{2}\right)t+\sigma\sqrt{t}Z}$$

Donde:

- $W(t)$ es la riqueza en el tiempo t
- $W(0)$ es la riqueza inicial
- μ es el rendimiento medio de la cartera
- σ es la desviación estándar o el riesgo de la cartera
- Z es una variable aleatoria normal estándar

CREACIÓN DE LA CUADRÍCULA DE ESTADOS DE RIQUEZA

La creación de la cuadrícula de estados de riqueza comienza con la determinación de los límites mínimos y máximos realistas de la riqueza ($\widehat{W}_{min}$ y $\widehat{W}_{max}$). Estos límites se calculan asumiendo que la evolución de la riqueza sigue un movimiento browniano geométrico con retornos μ y volatilidades σ extremas. Para $\widehat{W}_{min}$ se consideran el retorno mínimo μ_{min} y la volatilidad máxima σ_{max}, evaluando la riqueza en momentos sucesivos hasta el horizonte temporal T bajo la peor realización de la variable aleatoria Z (es decir,$Z = -3$). De manera similar,$\widehat{W}_{max}$ se calcula utilizando el retorno máximo μ_{max} y la volatilidad máxima σ_{max}[2], considerando la mejor realización de Z (es decir, $Z = 3$). Estos cálculos aseguran que los límites de la riqueza abarcan todas las posibles evoluciones de la riqueza dentro del horizonte temporal bajo las condiciones más extremas.

Finalmente, los valores para W_{min} y W_{max} se determinan como siguen:

$$\widehat{W}_{min} = \min_{\tau\in\{0,\dots,T\}}\left\{W(0)e^{\left(\mu_{min}-\frac{\sigma_{max}{}^2}{2}\right)t-3\sigma_{max}\sqrt{t}}\right\}$$

$$\widehat{W}_{max} = \max_{\tau\in\{0,\dots,T\}}\left\{W(0)e^{\left(\mu_{max}-\frac{\sigma_{max}{}^2}{2}\right)t+3\sigma_{max}\sqrt{t}}\right\}$$

Una vez establecidos $\widehat{W}_{min}$ y $\widehat{W}_{max}$, la riqueza se transforma al espacio logarítmico para manejar mejor su dispersión. En dicho espacio, se define una cuadrícula con un parámetro de densidad ρ_{grid}, que determina la distancia entre los puntos de la cuadrícula. Esta se construye añadiendo puntos en incrementos de $\frac{\sigma_{min}}{\rho_{grid}}$ desde el logaritmo de $\widehat{W}_{min}$ hasta el de $\widehat{W}_{max}$. Para asegurar que la cuadrícula incluye el valor inicial de la riqueza, $W(0)$, se ajusta la cuadrícula logarítmica de manera que uno de sus puntos coincida con el logaritmo de $W(0)$. Este proceso garantiza una representación discreta de los posibles valores de la riqueza en el tiempo, facilitando el análisis y la optimización en modelos financieros basados en la evolución de la riqueza.

FUNCIÓN DE VALOR Y ESTRATEGIA ÓPTIMA

En este artículo se aborda un problema de optimización en múltiples períodos. El objetivo es encontrar la acción en cada período de reequilibrio que maximice la probabilidad de que la riqueza exceda la meta al final del período de inversión. Para resolver este problema, se utiliza la ecuación de Bellman (Das et al., 2020):

$$V(W_i(t)) = \max_{\pi}\left[\sum_j V\left(W_j(t+1)\right)P(W_j(t+1)|\,W_i(t),\pi)\right]$$

La función de valor $V(W_i(t))$ representa la probabilidad de superar el objetivo de riqueza G en el momento t, dado que en ese momento t el nivel de riqueza es W_i. Al maximizar la función objetivo se indica que se está buscando la acción (en este caso, la elección de portafolio π) que maximiza la función de valor. Simultáneamente, $P(W_j(t+1)|W_i(t),\pi)$ representa la probabilidad de pasar al nodo de riqueza j en el momento $t+1$, dado que en ese momento t el inversionista se encuentra en el nodo de riqueza i y se elige el portafolio π como acción de reequilibrio.

CÁLCULO DE PROBABILIDADES DE TRANSICIÓN

Para calcular las probabilidades de transición, se utiliza un modelo matemático que supone que la evolución de la riqueza sigue un proceso llamado movimiento browniano geométrico. Esto significa que las probabilidades de pasar de un nivel de riqueza a otro en un momento dado dependen solo del nivel actual de riqueza y de la estrategia de inversión elegida. En términos más simples, la probabilidad de transición de estar en el nodo de riqueza W_j en el momento $t+1$, dado que estás en el nodo de riqueza W_i en el momento t, son homogéneos en el tiempo. Por lo tanto, la probabilidad de transición para una determinada elección de cartera π se define como:

$$\begin{aligned} P(W_j(t+1)|W_i(t),\pi) &= \mathbb{P}\left(W_j \le W(t+1) < W_{j+1}\middle|W(t)=W_i,\pi\right) \\ &= \tilde{p}\left(W_{j+1}\middle|W_i,\pi\right) - \tilde{p}\left(W_j\middle|W_i,\pi\right) \end{aligned}$$

2 Hay una condición adicional para tener en cuenta: si $\sigma_{max} > \frac{3}{\sqrt{t}}$, se ajusta σ a $\frac{3}{\sqrt{t}}$ para evitar que el término exponencial crezca de manera irrealista. Esto asegura que las suposiciones del modelo sigan siendo válidas y evita valores extremos que podrían no ser prácticos.

Donde:

$$\tilde{p}(W_k|W_i,\pi) = \Phi(\frac{1}{\sigma_\pi}\left(\ln\left(\frac{W_k}{W_i}\right) - \left(\mu_\pi - \frac{{\sigma_\pi}^2}{2}\right)\right))$$

Asimismo, Φ es la función de distribución acumulativa de la variable aleatoria normal estándar. Así, esta fórmula tiene en cuenta el rendimiento (μ_π) y el riesgo (σ_π) de la cartera de inversión utilizada π. Por ejemplo, si se está en el nivel de riqueza W_i en el momento actual y se quiere saber la probabilidad de pasar al nivel W_j en el próximo período, se puede usar la fórmula mencionada. Esto se repite para cada par de niveles de riqueza posibles. Cabe indicar que se establecen condiciones especiales[3] para el primer y último nivel de riqueza.

Si $j = 1,\ P(W_1(t+1)|W_i(t),\pi) = \tilde{p}(W_2|W_i,\pi),\ \forall t \in \{0,\dots,T\}$ D

Y si $j = i_{max},\ P(W_{i_{max}}(t+1)|W_i(t),\pi) = 1 - \tilde{p}\left(W_{i_{max}}|W_i,\pi\right),\ \forall t \in \{0,\dots,T\}$

> En este artículo se aborda un problema de optimización en múltiples períodos. **El objetivo es encontrar la acción en cada período de reequilibrio que maximice la probabilidad de que la riqueza exceda la meta al final del período de inversión.**

MAXIMIZAR LA PROBABILIDAD DE LOGRAR EL OBJETIVO DEL INVERSOR

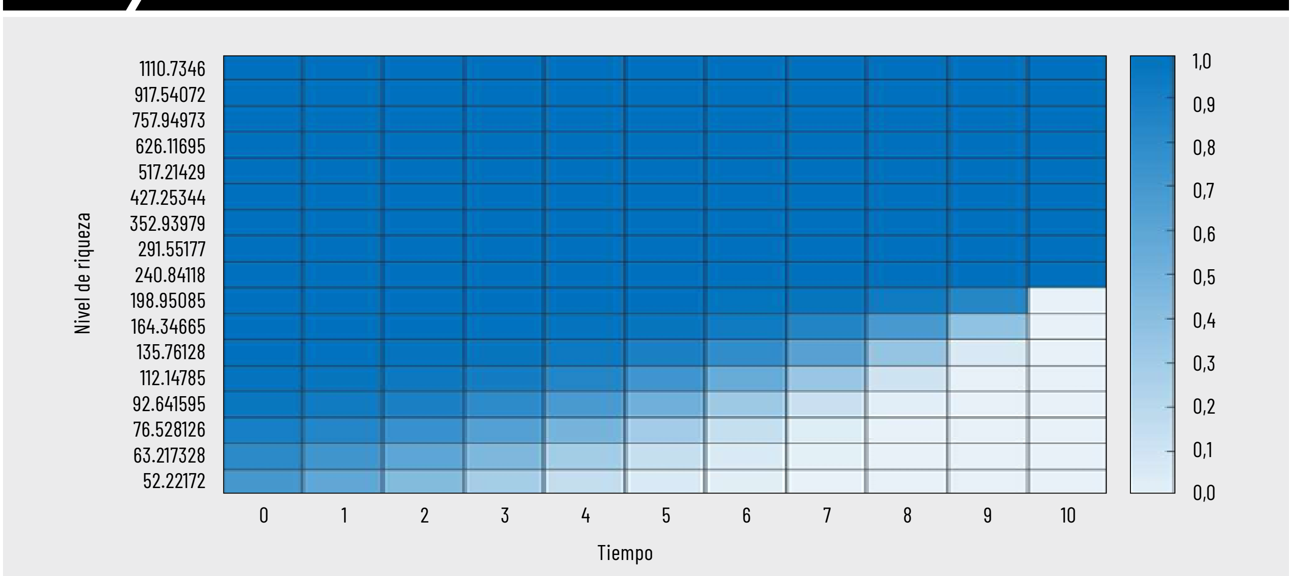
Dado que la función de valor es la probabilidad de lograr el objetivo de inversión patrimonial G en el paso de tiempo final. La función de valor $t = T$, está dado por:

$$V\left(W_i(t)\right) = \begin{cases} 0 & Si\ W_i(T) < G \\ 1 & Si\ W_i(T) > G \end{cases}$$

Para calcular el valor de $V\left(W_i(t)\right)$ para $t < T$, necesitamos retroceder en el tiempo. Empezamos en $t = T - 1$ para determinar la cartera que alcanza el máximo en la ecuación de Bellman y $V\left(W_i(T-1)\right)$. Luego continúa con $t = T - 2$ y después $t = T - 3$, hasta que se alcance $t = 0$. El valor de $V\left(W(0)\right)$ es la probabilidad óptima de alcanzar el objetivo de riqueza G de la riqueza inicial $W(0)$.

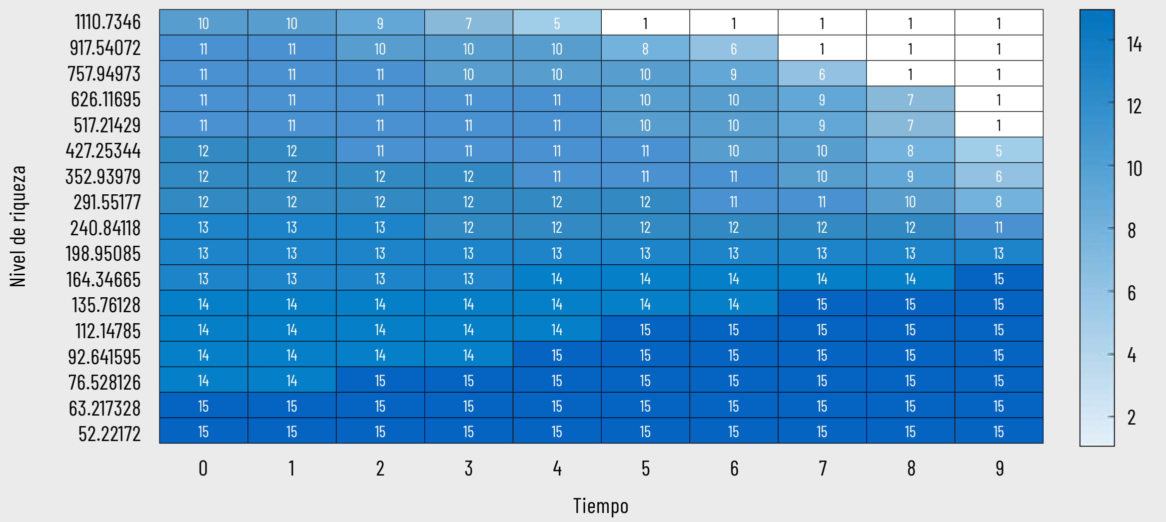
El Gráfico 2 muestra cómo la probabilidad de lograr el objetivo aumenta a medida que crece la riqueza inicial. Además, demuestra que, a medida que pasa el tiempo, la riqueza actual debe ser mayor que en períodos anteriores para obtener la misma probabilidad de lograr la meta.

GRÁFICO 2 | Probabilidad de alcance de objetivo



3 Se calculan las probabilidades de transición de manera diferente a las probabilidades de transición descritas por Das, para mantener un mapeo consistente entre $W(t)$ y un índice de nodo de riqueza único.

GRÁFICO 3 ▪ Agresividad del portafolio



El Gráfico 3 muestra que, cuanto mayor es la riqueza, menor es el número de la cartera óptima. Dado que el número de la cartera está directamente relacionado con la agresividad de la estrategia, se puede ver que cuanto más rica es la cartera, menos riesgo se necesita para lograr el objetivo de riqueza final. Cuando la cartera tiene menos dinero, entonces la cartera óptima es aquella con un mayor rendimiento esperado, incluso a costa de aumentar la volatilidad. Además, se debe considerar que cuanto más se acerca el período al final del horizonte de inversión, la elección de la cartera óptima se polariza (extremadamente agresiva o extremadamente conservadora). Adicionalmente, a medida que aumenta la probabilidad de alcanzar el objetivo de riqueza (la función de valor), la agresividad (número) de la cartera óptima disminuye.

El Gráfico 4 muestra que en $t = 2$ se ha logrado el objetivo de riqueza. Sin embargo, debido a la incertidumbre del problema, la probabilidad de éxito aún no es 1. Además, al probar diferentes caminos (semillas aleatorias) se muestra cómo, incluso, un aumento monótono de la riqueza no se traduce en un aumento monótono de la probabilidad de éxito. Este comportamiento se produce porque el aumento de la riqueza en períodos posteriores debe ser mayor que en períodos anteriores para tener el mismo aumento en la probabilidad de éxito.

GRÁFICO 4 ▪ Trayectoria de la riqueza frente a la probabilidad de alcanzar el objetivo de riqueza

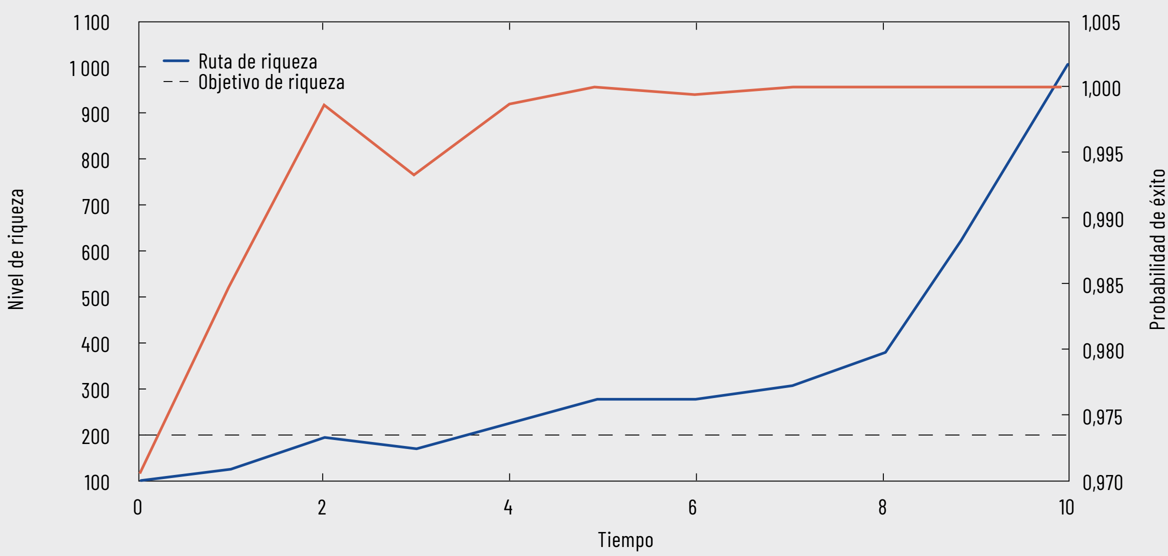
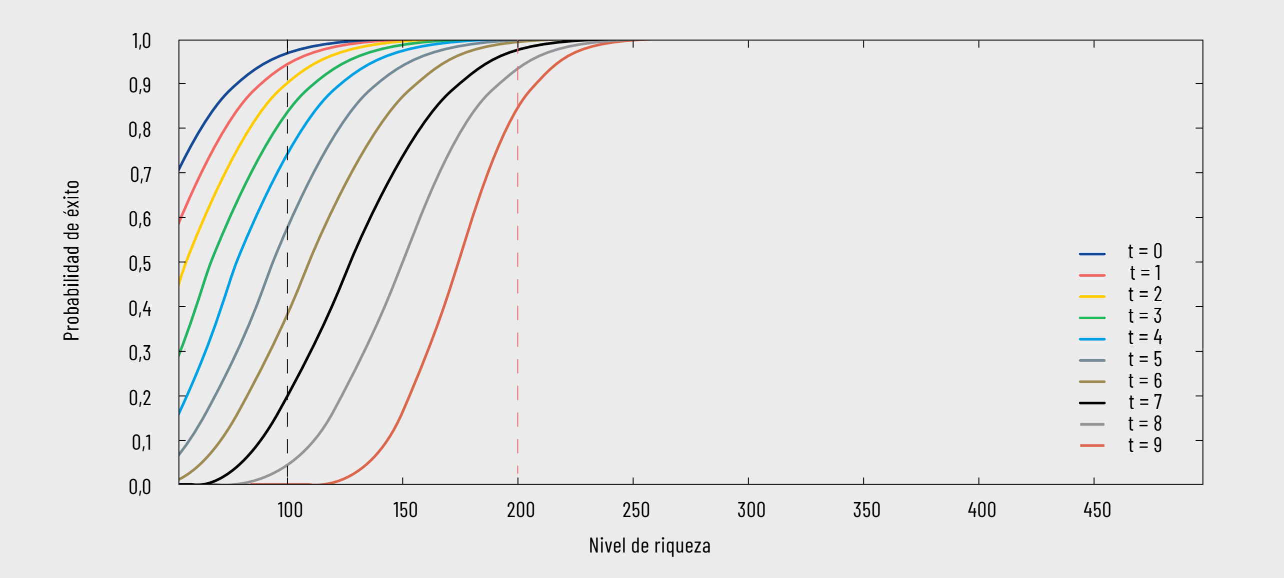


GRÁFICO 5 ■ **Función de distribución acumulativa para alcanzar la riqueza objetivo en diferentes períodos de tiempo**



El Gráfico 5 muestra cómo, a medida que el período se acerca al horizonte de inversión, la función de distribución acumulativa (CDF) se desplaza hacia la derecha y se vuelve más pronunciada. Esto demuestra que los cambios en el nivel de riqueza tienen un mayor impacto hacia el final del horizonte de inversión. Por ejemplo, en un aumento de 100 a 110 puntos de riqueza en $t = 0$ el aumento en la probabilidad de éxito es menor que cuando la misma riqueza aumenta en $t = 4$.

"La asignación dinámica de carteras permite a los inversores personalizar sus estrategias de inversión para maximizar **la probabilidad de alcanzar objetivos específicos, lo que es especialmente útil en entornos de mercado volátiles o inciertos.**"

CONCLUSIÓN

La asignación dinámica de carteras permite a los inversores personalizar sus estrategias de inversión para maximizar la probabilidad de alcanzar objetivos específicos, lo que es especialmente útil en entornos de mercado volátiles o inciertos. A diferencia de las estrategias de inversión estáticas, este enfoque dinámico permite ajustar la tolerancia al riesgo a lo largo del tiempo, asegurando que las decisiones de inversión se mantengan alineadas con la evolución de la riqueza y las metas financieras. El enfoque demuestra que no solo es importante la cantidad de riqueza acumulada, sino también la trayectoria que sigue esta acumulación, ya que afecta la probabilidad de éxito en la consecución de los objetivos financieros. Adicionalmente, la metodología propuesta puede ser adaptada para diferentes tipos de inversores con diversas metas, lo que la convierte en una herramienta versátil y aplicable a múltiples escenarios de inversión.

REFERENCIA

- **Chhabra, A. (2005).** Beyond Markowitz: A Comprehensive Wealth Allocation. *Journal of Wealth Management*.
- **Das, R. D., Ostrov, D., Radhakrishnan, A., & Srivastav, D. (2020).** Dynamic Portfolio Allocation in Goals-Based Wealth Management. *Computational Management Science 17*.
- **Kahneman, D. A. (1979).** Prospect Theory: An Analysis of Decision. *Econometrica*.
- **Matlab (s.f.).** *Dynamic Portfolio Allocation in Goal-Based Wealth Management for Multiple Time Periods*.
- **Nevins, D. (2004).** Goals-Based Investing: Integrating Traditional Behavioral. *Journal of Wealth Management*.
- **Shefrin, H. A. (2000).** Behavioral Portfolio Theory. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- **Thaler, R. (1999).** Mental Accounting Matters. *Journal of Behavioral Decision*.