Ventas atadas y agregación de servicios en un esquema de precios tope

Miguel Angel Martinez Carrasco

Resumen

Este documento estudia el impacto de la aplicación de un esquema de precios tope sobre el equilibrio de mercado (precios y cantidades) en un monopolio multiproducto, así como sobre sus decisiones de realizar ventas atadas, cuando dicho esquema no abarca todos los bienes que pueden ser atados. Se desarrolla un modelo de escrutinio monopolístico, asumiendo la condición de un sólo cruce en las preferencias individuales para trabajar el modelo con un monopolio unidimensional. Se demuestra que existen diferencias en los resultados, a nivel de equilibrio y de bienestar de los consumidores, si todos los precios de los servicios que la empresa puede incluir en una venta atada no están restringidos por el esquema de precios tope. Esta diferencia surge porque se incentiva a la empresa a realizar ventas atadas de diferentes productos que le permiten reducir el precio implícito de los bienes sujetos al precio tope sin generar reducciones equivalentes en los precios finales pagados por los usuarios, lo cual nos aleja del óptimo social.

Palabras Clave: Ventas Atadas, Servicios Adicionales, Escrutinio Monopolístico, Incertidumbre, Precios Tope.

Subgerencia de Investigación
Gerencia de Políticas Regulatorias
OSIPTEL

Índice

Ventas atadas y agregación de servicios en un esquema de precios tope[1]

Miguel Angel Martinez Carrasco[2]

1. Introducción

El modelo de regulación por precios tope fue diseñado por Stephen Littlechild en 1983, para regular a empresas de servicios públicos en el Reino Unido, las cuales serían privatizadas en el marco de las reformas implementadas por el gobierno británico. En su formulación original, Littlechild propuso que las tarifas de los servicios públicos debían ajustarse por una fórmula que considere los cambios en los precios de la economía (tasa de inflación) menos un factor de descuento denominado "X", que mide las ganancias de productividad de la empresa relativas a la economía.

El modelo de regulación por precios tope pertenece a un enfoque de regulación por incentivos, en consideración a los incentivos de alto poder que transmite a las empresas administradas para que éstas se esfuercen en mejorar su eficiencia productiva, optimizando el uso de sus recursos productivos. Los incentivos operan a través del denominado rezago regulatorio o periodo contractual, por el cual el regulador se compromete a mantener fijo el valor de X por un periodo determinado, habitualmente entre 3 y 5 años, sin posibilidad de alteraciones a este valor. La existencia de beneficios potenciales generados por el esfuerzo de la empresa en reducir costos le darán a ésta los incentivos necesarios para que reduzca sus costos de producción y alcance niveles de eficiencia cada vez más cercanos al óptimo. Este modelo se considera por lo general, superior en términos de los incentivos que genera, frente a otro tipo de enfoques regulatorios, como el tradicional enfoque de regulación por costos o tasa de retorno[3].

Por lo general el precio tope se aplica a un conjunto o canasta de servicios de modo que la empresa tiene flexibilidad para ajustar los precios de cada elemento individual de este conjunto de servicios. En este sentido, la empresa fija libremente los precios de los elementos de la canasta con la restricción que el promedio ponderado de los precios cumpla con lo dispuesto por el tope tarifario. Brennan (1991) ha mostrado que permitir cierta flexibilidad a la empresa regulada para establecer tarifas individuales sin sobrepasar un tope promedio

[1] Documento de trabajo No 2. Enviar comentarios y sugerencias a mangel@osiptel.com.pe

[2] Se agradece los valiosos comentarios de Juan Carlos Carbajal, Lennin Quiso y Christian Gonzales.

[3] Sappington y Ai (2002), muestran que en 1985, cincuenta (50) estados de EUA regulaban las tarifas de la industria de las telecomunicaciones a través de un esquema del tipo tasa de retorno. En 1989, de estos cincuenta (50) estados, diecinueve (19) habían optado por alguna forma de regulación por incentivos, mientras que en 1999, treinta y cinco (35) contaban con un sistema de Precios Tope. Así mismo, diferentes países han optado por este esquema regulatorio.

para estas tarifas, es equivalente a una situación en que la empresa regulada maximiza sus beneficios sujeta a la restricción que el bienestar de los consumidores no caiga por debajo de un nivel pre-establecido. Por lo tanto, la empresa establecerá las tarifas individuales bajo criterios de optimalidad.

Sin embargo, estudios posteriores reflejan que establecer un tope a un promedio de tarifas, y no a tarifas individuales, permite la suficiente flexibilidad para que la empresa tenga incentivos a utilizar diferentes estrategias de ventas que le permitan maximizar sus beneficios en perjuicio del bienestar social. Muchas de estas estrategias se dan porque los formatos utilizados para la aplicación del precio tope o en la regulación en general no se ajustan a las diferentes estructuras tarifarias de los países a los cuales son aplicados además de la existencia de fallas del mercado. Sappington y Sibley (1992), muestran como la versión del modelo de precios tope aplicado por la FCC a la empresa norteamericana AT&T, generaba incentivos a la empresa a usar estructuras de precios no lineales que le permitían maximizar sus beneficios en prejuicio del bienestar social.

Otro ejemplo de ello, es el modelo de Corts (1995). El documento demuestra utilizando un modelo de escrutinio monopolístico para un monopolio multiproducto, previamente *adecuado*[4] como un problema de escrutinio unidimensional, que aplicar un precio tope al servicio básico (hace referencia a la industria de televisión por cable en Estados Unidos) puede resultar en precios más altos para algunos consumidores y precios más bajos para otros respecto de los precios eficientes dependiendo de la tipología del individuo. Corts demuestra también, que bajo ciertas circunstancias la regulación de un monopolio multiproducto en la industria del cable lleva a la empresa a desempaquetar productos, generando resultados socialmente sub óptimos dado el contexto en el que lo analiza.

El objetivo de este documento es analizar la aplicación del esquema regulatorio de precios tope en el mercado de telefonía fija en el Perú dada la estructura tarifaria actual de sus planes de consumo. La hipótesis que se maneja es que este esquema puede tener efectos negativos sobre los individuos de bajos recursos, afectando posteriormente el bienestar social. Demostramos que la regulación incentiva a la empresa a realizar ventas atadas de servicios adicionales en los planes de telefonía fija, provocando reducciones en el bienestar social. Para ello utilizamos un modelo de escrutinio monopolístico, basándonos en los supuestos utilizados por Corts (1995)[5], aunque con algunas variaciones que nos permitan asemejarnos mejor al caso de estudio. Las principales variaciones están en la forma como nos acercamos a la restricción de precios tope, donde no solo limi-

[4] Corts, en su documento plantea la siguiente definición: Una representación unidimensional de un problema de escrutinio multidimensional es *adecuado* si las preferencias en el problema de escrutinio unidimendional satisfacen la propiedad estándar de un solo cruce y la solución artificialmente construida para el problema unidimensional es también la solución para el problema multidimensional irrestricto.

[5] Corts, a su vez se basa en el documento de Besanko, Donnenfeld y White (1988), el cual utiliza también un modelo de escrutinio monopolístico. Ellos muestran que con consumidores heterogéneos, la elección de la calidad ofrecida por la empresa de los bienes vendidos a cada tipo de individuo perjudica al individuo de tipo bajo. Luego comparan como bajo diferentes alternativas regulatorias se puede corregir este problema, haciendo a su vez una comparación de los efectos en el bienestar social de cada una de las alternativas.

tamos el precio del servicio básico sino que el precio tope aplicado a la empresa limita una canasta de servicios. Dentro de esta canasta la empresa es libre de determinar como cumple con la restricción requerida. Posteriormente analizamos como es afectado el resultado anterior si la empresa vende productos atados y los precios de algunos de los servicios atados no están sujetos a la restricción de precios tope.

Este documento está organizado como sigue. En la parte 2, se explica de una manera más detallada como se aplica la regulación por precios tope en el Perú en el servicio de telefonía fija. En esa misma sección, describimos como podrían darse incentivos a la empresa para usar una estrategia de ventas atadas de servicios dada esa estructura tarifaria. En la parte 3, se busca explicar los casos en los que la literatura actual contempla que un empaquetamiento o venta atada de servicios es beneficioso socialmente y lo comparamos con el caso peruano para entender si se ajusta a esta realidad. En la sección 4, presentamos el modelo y los principales resultados bajo diferentes especificaciones que nos ayudan entender los efectos de las ventas atadas sobre el equilibrio de mercado en un contexto de precios tope. Finalmente. las conclusiones del modelo son presentadas en la sección 5 del documento.

2. Características del mercado de telefonía fija en el Perú y el esquema de precios tope

En el Perú, desde la concesión de 1994, existe un sólo operador que brinda el servicio de telefonía fija en el sector residencial, Telefónica del Perú S.A.A. En dicho contrato se determinó que el esquema para la regulación de precios de telefonía fija sería un modelo de precios tope, el cual entraría en vigencia a partir del año 2001.

El modelo de precios tope tiene como meta que los precios cobrados a los consumidores se asemejen a los de competencia pefecta. La metodología establecida en el Perú determina que los precios se ajusten anualmente por el Factor de Productividad, denotado con la letra X, controlado por la inflación. Este factor es aplicado al promedio ponderado de las tarifas de los elementos que componen una determinada canasta de servicios. La fórmula de variación de precios establecida en el contrato de concesión fue la siguiente:

$$\triangle P = \pi - X$$

Donde: $\triangle P$= Variación de precios cobrados por la empresa.
π = Inflación.
X = Factor de Productividad.

Además el Factor de Productividad X, se determina con la siguiente ecuación:

$$X = \left(\triangle A - \triangle A^{E}\right) + \left(\triangle W^{E} - \triangle W\right),$$

donde: $\triangle W$ es la variación en el precio de los insumos de la empresa,
$\triangle W^E$ es la variación en el precio de los insumos de la economía,
$\triangle A$ es el indicador de Productividad de la empresa; y
$\triangle A^E$ es el indicador de de Productividad de la economía.

Este factor de productividad anual es determinado por el organismo regulador cada tres años, pero el ajuste de las tarifas se realiza trimestralmente. La empresa realiza una propuesta de tarifas en forma trimestral es aprobada por el organismo regulador si cumple con la restricción de precios tope impuesta.

El cumplimiento de dicha restricción se da cuando el ratio tope, es decir, la variación de los precios ponderados por su importancia relativa en los ingresos de la empresa en el periodo anterior (en este caso, expresado en trimestres) es menor o igual que el factor de control para dicho trimestre. Este factor de control al que hacemos referencia es el factor de productividad anual trimestralizado ajustado por la inflación. Para esclarecer dichos conceptos presentamos su formulación matemática a continuación:

$$Factor\ de\ Control = F_n = (1 + X_t) * \frac{IPC_{n-1}}{IPC_{n-2}}$$

$$RT_{jn} = \Sigma \left(\alpha_{ijn-1} * \frac{T_{ijn}}{T_{ijn-1}} \right) \leq F_n$$

Donde: F_n es el factor de control en el trimestre n;
X_t es el Factor de Productividad anual trimestralizado;
IPC_n es el Índice de Precios al Consumidor en el trimestre n.
RT_{jn} es el ratio tope de la canasta j en el trimestre n.
α_{ijn-1} es la participación en los ingresos del servicio i perteneciente a la canasta j en el trimestre n-1.
T_{ijn} es la tarifa del servicio i perteneciente a la canasta j en el trimestre n.

Por otro lado, de la misma manera como se estableció en el contrato de concesión las fórmulas del esquema de precios tope, en dicho contrato se determinó cuales serían los servicios afectados por el esquema de precios tope y se les agruparon en tres canastas[6]. Cualquier otro servicio no incluido en esas categorías, no resultaría admisible que fuera afectado por la fórmula de tarifas tope, aún si ese servicio perteneciera a un plan o paquete tarifario.

[6] Las canastas que se establecieron fueron las siguientes:
Canasta C: Compuesta por el servicio de establecimiento de una conexión de servicio de telefonía fija local nueva, a ser cobrada sobre la base de un cargo único de instalación;
Canasta D: Compuesta por los servicios de (i) prestación de una conexión de servicio de telefonía fija local, a ser cobrada en base a una renta mensual y (ii) las llamadas telefónicas locales;
Canasta E: Compuesta por los servicios de: (i) llamadas telefónicas del servicio de larga distancia nacional y (ii) llamadas telefónicas internacionales;

La empresa concesionaria puede realizar ventas atadas que incluyan los servicios pertenecientes a una determinada canasta y otros servicios ajenos a ésta, pero sólo se considerarán como elementos tarifarios sujetos a precios tope a la porción de la tarifa correspondiente únicamente a los servicios que por contrato pertenecen a la canasta respectiva. Por lo tanto, las tarifas que se toman en cuenta para calcular el cumplimiento de los precios tope son diferentes a las tarifas efectivamente pagadas por los usuarios finales, debido a que se deduce del pago final, de ser el caso, la porción del pago correspondiente a servicios que no pertenecen a la canasta[7].

En la actualidad, en el Perú existen 44 planes tarifarios de telefonía fija, 23 de ellos cuentan con por lo menos un servicio adicional, lo que equivale a casi la tercera parte de las líneas de abonado en funcionamiento a diciembre de 2005. La pregunta que surge de manera inmediata es ¿cómo se determinan los precios correspondientes a cada uno de estos servicios?, ¿la empresa es quién fija los precios?, de ser así ¿tiene alguna restricción o límite?, ¿cuántos servicios puede la empresa incluir en un plan, y por tanto descontar?.

Para determinar el precio que ha de ser descontado existían dos formas. En la primera opción, se le brindaba a la empresa la libertad de establecer la tarifa de los servicios adicionales excepto en aquellos que están sujetos a algún tipo de regulación (diferente al del esquema de precios tope al servicio de telefonía fija), bajo el condicionamiento de que los usuarios puedan renunciar al pago de dicho servicio después de los primeros seis meses de contratado el plan y por tanto al pago de dichos servicios adicionales. La segunda opción establecía que en caso de que la empresa no determine las tarifas, era el organismo regulador quien las establecía y los usuarios no tenían la opción de renunciar. Además bajo las leyes que se encontraban vigentes, podría interpretarse que la empresa tenía la facultad de incluir en los planes tarifarios existentes o en los planes nuevos que introducía, los servicios adicionales que considere, lo cual aumentaba la brecha entre el monto que se le cobraba al consumidor y el que se consideraba en la aplicación del modelo de precios tope.

El uso de estos mecanismos por parte de la empresa hubiera tenido una implicancia directa en el cumplimiento del ajuste de las tarifas de los servicios públicos de telefonía fija, es decir, en el cumplimiento del esquema regulatorio de precios tope. El ejemplo a continuación nos permitirá esbozar la idea anterior:

Considere el siguiente plan:

- El Plan A, en un primer periodo, contiene 60 minutos incluidos por el pago de una renta mensual equivalente a 60 Nuevos Soles.

- En un segundo periodo, se realiza una modificación de este plan existente, con lo cual el Plan A contiene los mismos 60 minutos incluidos pero se le

[7] Si nos centramos en el caso peruano, básicamente hacemos referencia a la canasta D, donde se regulan los planes tarifarios de telefonía básica de llamadas de un teléfono fijo a otro, planes a los cuales la empresa usualmente les incluye la prestación de un servicio adicional, como llamada tripartita, memovox, llamada en espera, entre muchos otros.

aumentan dos servicios adicionales, mientras que el valor de la renta sigue siendo 60 Nuevos Soles.

- La empresa es libre de fijar el precio de sus dos servicios adicionales que ha incluido bajo la restricción que éstos no sean más caros que el conseguir estos mismos productos a través de otros mecanismos ofrecidos por la empresa en los últimos 6 meses o de que no estén sujetos bajo otro mecanismo regulatorio[8].

- Si suponemos que la empresa valora ambos servicios adicionales en 20 Nuevos Soles, entonces ahora los 60 minutos costarían sólo 40 Nuevos Soles y se le debería reconocer a la empresa el ahorro generado de 20 Nuevos Soles, como una reducción en la renta en el ajuste trimestral respectivo[9].

En esta perspectiva, la libertad de manejo por parte de la empresa en precios y cantidades de servicios adicionales se debe evaluar. El mecanismo de precios tope introduce fuertes incentivos en un esquema en el cual todos los productos pertenecientes a los planes de telefonía fija no son considerados dentro de la regulación del servicio, porque la empresa podría cumplir con los precios tope sin hacer reducciones efectivas al precio pagado por los usuarios.

3. Incentivos para el empaquetamiento y la venta atada de Servicios

La comprensión de los incentivos que tienen las empresas al realizar ventas atadas o empaquetamientos de servicios adicionales es fundamental para abordar la problemática del tratamiento de los servicios adicionales bajo un esquema regulatorio de precios tope en el Perú. Este aspecto es especialmente relevante si se considera que los individuos tienen la opción de aquirir dichos servicios adicionales por separado.

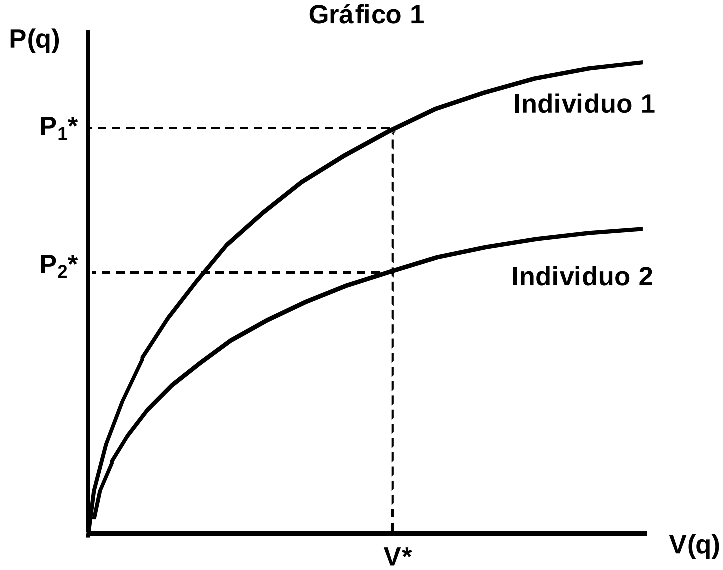
La literatura económica sugiere que bajo ciertas circunstancias estas prácticas son consistentes con una conducta óptima por parte de una empresa que maximiza beneficios. El no cumplimiento de la "Condición de Un Solo Cruce" (single crossing property) en las preferencias de los individuos es una condición

[8] Es necesario tomar en cuenta que la empresa pudo haber aumentado un mayor número de servicios adicionales, por simplicidad asumimos sólo 2.

[9] Una de las opciones de la empresa que son válidas para cumplir con la reducción de precios exigida es cambiar un plan existente haciéndolo más barato o introduciendo un nuevo plan. En este caso en particular, se da un cambio del plan existente. Sin embargo, esa opción por las características del ejemplo es equivalente a la introducción de un nuevo plan en el segundo periodo. Dada la normativa vigente, la tarifa con la que se compararía el plan nuevo debe ser la tarifa del plan que es la segunda mejor opción dentro los rangos de consumo en que el plan entrante genera la opción más barata de consumo. En nuestro ejemplo, si asumimos que sólo existía el Plan A en el primer periodo la reducción en renta generada es la misma que si se modificara dicho plan.

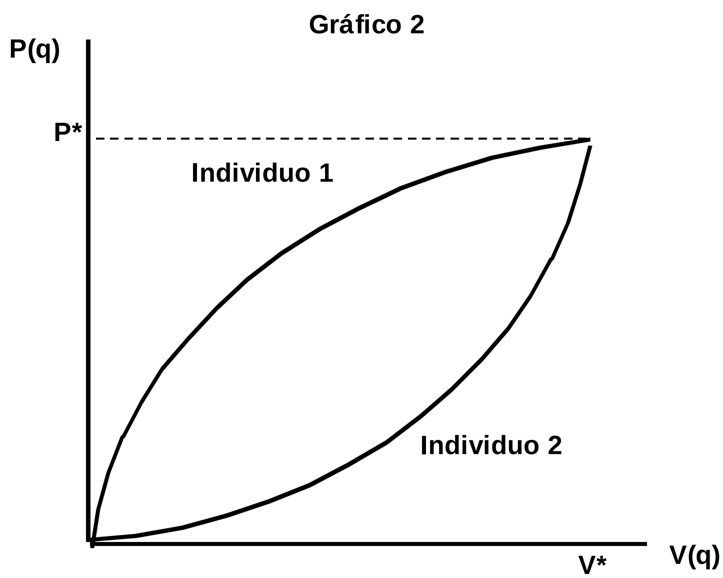
necesaria pero no suficiente para que la empresa realice empaquetamientos, llevando a una maximización de sus beneficios y del bienestar de los consumidores. Esta característica del no cumplimiento de la "Condición de Un Solo Cruce" para el empaquetamiento o las ventas atadas de servicios se observa cuando los usuarios tienen disposiciones a pagar "cruzadas" entre distintos servicios.

Gráfico 1



La condición de un sólo cruce podemos entenderla mejor a través del gráfico 1. En el eje horizontal del gráfico se encuentra la disposición a pagar de los individuos por el bien q, valor que se encuentra determinado por las preferencias de los individuos. Por otro lado, en el eje vertical se presenta el precio del bien dadas las diferentes cantidades consumidas de q. En este gráfico hemos asumido la existencia de dos tipos de individuos representativos de la sociedad con diferentes curvas que reflejan sus disposiciones a pagar. Entre más elevada es la disposición a pagar y más bajo el precio de equilibrio mayor será la utilidad que consiga el consumidor. En este caso vemos que las curvas sólo se cruzan en el punto inicial, cuando la disposición a pagar y el precio son iguales a cero para ambos individuos. En estos casos a la empresa le conviene vender el mismo producto a ambos consumidores a precios diferenciados.

En el gráfico 2 en cambio vemos que a partir de cierta cantidad la disposición a pagar del individuo dos por el bien q empieza a aumentar mucho más rápido que la disposición a pagar del individuo 1, la cual empieza a crecer cada vez más lento. Por ello en en el punto (V^*, P^*), las curvas que representan a ambos tipos de individuos se terminan cruzando por segunda vez (la primera, al igual que en el caso anterior es en el punto en que ambos ejes se encuentran en cero). A la empresa en este caso le conviene vender en este punto al precio dado, P^*, dado que ambos consumidores le pagarían dicho monto.



De esta manera la empresa maximiza sus beneficios y extrae todo el excedente de los consumidores. En el caso de las ventas atadas se mantiene la misma figura sólo que en el eje de la disposición a pagar de los individuos se dan aumentos conforme las disposiciones a pagar por diferentes productos y se analiza si las preferencias de los individuos se cruzan entre estos.Para analizar la ventas atadas de servicios a partir de este concepto revisemos el siguiente ejemplo:

- Considérese un monopolio natural multiproducto.
- Considérese dos individuos representativos (A y B) en la economía con diferentes disposiciones a pagar por los dos bienes que la firma produce (X e Y). Las disposiciones a pagar, determinan diferentes situaciones que podemos simplificar en los siguientes casos:

  Caso 1: Dadas las disposiciones a pagar que presentan los individuos en el siguiente cuadro, a la empresa le conviene vender cada producto por separado, poniendo precio al bien X, $P_x = 2$, y un precio al bien Y, $P_y = 5$. En esta situación el bien X es comprado tanto por el consumidor A como por el consumidor B, y el bien Y es consumido por el consumidor B, obteniendo unas ganacias totales que llega a un valor de 9. Cualquier otra opción de precios individuales le daría menores ganancias e incluso realizando una venta atada de los servicios X e Y, los podría vender a un precio de 4, con lo cual ambos comprarían el paquete y obtendría unas ganacias de 8; o podría venderlos a un precio de 8, con lo cual sólo el individuo B compraría el bien y las ganancias serían también 8.

Bienes / Individuos	X	Y
A	2	2
B	3	5

Caso 2: Dadas las valoraciones del cuadro presentado abajo, al monopolista le conviene vender ambos productos de manera atada, a un precio de $P_{xy} = 6$. Con este precio la empresa obtiene ganancias iguales a 12, debido a que ambos consumidores compran el bien. Aquí podemos observar que no se cumple la condición de un solo cruce, debido a que el individuo A tiene una alta valoración por el bien X y una baja valoración por el bien Y, mientras que el individuo B tiene valoraciones que se comportan de manera contraria. En este caso si la empresa vendiera sus producto de manera separada, la cantidad máxima de ganancias que podría obtener sería de 9, con un precio para $P_x = 4$ (bien comprado sólo por el individuo A) y con un precio $P_y = 5$ (bien comprado sólo por el inividuo B)

Bienes / Individuos	X	Y
A	4	2
B	1	5

Caso 3: En este último caso, que hace referencia al cuadro que viene a continuación, vemos que tampoco se cumple la condición de un solo cruce, pero la disposición a pagar de uno de los individuos por uno de los bienes es tan alta que la empresa maximiza sus ganancias vendiendo ambos productos por separado. Con $P_x = 4$ y $P_y = 9$, obteniendo ganancias iguales a 13. El lector puede comprobar al igual que hemos hecho en los casos anteriores que ninguna otra alternativa le generará a la empresa una cantidad de ganancias mayor.

Bienes / Individuos	X	Y
A	4	2
B	1	9

Con este ejemplo se muestra la proposición presentada anteriormente que para que exista un empaquetamiento de servicios en es una condición necesaria más no sufciente que no se cumpla la condición de un sólo cruce, y no es suficiente porque la disposición a pagar de un individuo por un bien puede ser tan alta como para que a la empresa le convenga vender los diferentes productos por separado[10].

En el caso del mercado de telefonía fija, es razonable pensar que los individuos cuya disposición a pagar por los minutos consumidos en el mercado de telefonía fija es mayor, tendrán una disposición a pagar más alta por los servicios adicionales. En otras palabras, no existiría un motivo aparente para realizar empaquetamientos porque la condición de un solo cruce en las preferencias se cumpliría. Con esta premisa surge la pregunta si es que este empaquetamiento de servicios es consecuencia de la estructura tarifaria dado el esquema regulatorio vigente.

4. Modelo

Para responder la pregunta anterior se desarrolla un modelo de escrutinio monopolístico basado en Corts (1995). Por el lado de la oferta, estamos asumiendo que tenemos un monopolio multiproducto en la industria de telecomunicaciones que vende el servicio básico, en este caso, el consumo de minutos para realizar llamadas telefónicas de fijo a fijo, y también produce ciertos servicios adicionales. La empresa puede vender estos productos adicionales únicamente si el consumidor ha adquirido el servició básico. Sin embargo, el servicio adicional puede venderse a través de un empaquetamientos de servicio o por fuera.

Por el lado de la demanda, el modelo asume la existencia de dos tipos de individuo, cada uno representando un población de n individuos. Uno de los tipos tiene una mayor disposición a pagar por los minutos de llamadas realizadas y por ende por los servicios adicionales, mientras que el otro tiene una menor disposición a pagar por minutos y no tiene utilidad de consumir los servicios adicionales (dispocisión a pagar igual a cero). Es decir se cumple la condición de un solo cruce.

Un concepto central en esta literatura es el de adecuación (Corts; 1995) de modelos de escrutinio monopolísticos multiproductos a modelos unidimensionales. Corts nos plantea la siguiente proposición:

> Proposición: Existe un ordenamiento de los bienes tal que la representación unidimensional del problema de escrutinio multi-producto es adecuado si y sólo si las preferencias satisfacen la Condición de un Solo Cruce[11].

[10] Existen otros desarrollos acerca de las estrategias utilizadas por las empresas para empaquetar o no servicios dado las preferencias de los individuos, que incluyen tres bienes y explican la utilizacióndе estrategias mixtas, empaquetar dos servicios y vender el tercero por separado. Para profundizar en esta literatura revisar Oz Shy (1996).

[11] Para ver la demostración de esta proposición revisar el documento de Corts (1995).

En este caso, como hemos supuesto que la condición de un sólo cruce se cumple en las preferencias de los individuos, podemos trabajar el problema multiproducto de manera unidimensional. Para poder trabajar el problema de manera unidimensional tomamos la utilidad de los individuos como aditivamente separable, es decir, la función de utilidad del individuo será la sumatoria de sus disposiciones a pagar. Asimismo, el sumando que hace referencia a determinado bien, es la utilidad que el individuo recibe por el consumo de dicho bien. En el modelo trabajamos con funciones de utilidad netas, es decir, la utilidad menos el precio. Es a estas funciones las que se exige el cumplimiento de la condición de un solo cruce. Las funciones de utilidad netas generada por el servicio telefónico y otro servicios adicionales son las siguientes:

$$\begin{aligned} U_1(q_1, h_1) &= \theta_1 v(q_1) + h_1 - T_1(q_1, h_1) \\ U_2(q_2, h_2) &= \theta_2 v(q_2) - T_2(q_2, h_2) \end{aligned}$$

Considérese:

q_i es la cantidad de minutos consumidos del paquete i.
h_i es la cantidad de servicios adicionales consumidos del paquete i.
T_i es el precio cobrado por el paquete i.
U_i es la utilidad del individuo i.

Para asegurar solución al problema de optimización suponemos que v(.) es una función creciente y cóncava que determina la utilidad generada por el consumo de q_i, es decir, $v_i(0) = 0, v_i'(q_i) > 0$ y $v_i''(q_i) \leq 0$. Además, la variable que nos permite diferenciar la tipología de los individuos en el producto q_i es la variable θ_i. En nuestro problema se asume que $\theta_1 > \theta_2$. Además como se cumple la condición de un sólo cruce en las preferencias, el individuo 1 recibe una utilidad positiva de consumir el bien h_1, mientras que la utilidad (expresada en disposición a pagar) del indiviuo 2 por el bien h_2 es nula.

Junto con los supuestos anteriores, para desarrollar el modelo de escrutinio monopolístico, donde se maximizan los beneficios de la empresa (Π) dada una heterogeneidad de consumidores, se asume que existe una proporción β de individuos del tipo 1 y una proporción $(1 - \beta)$ de individuos del tipo 2. Además se asume que las funciones de costo para producir el bien q_i y h_i, $c(q_i)$ y $d(h_i)$ respectivamente son funciones convexas y crecientes, es decir, $c_i(0) = d_i(0) = 0; c_i'(q_i), d_i'(h_i) < 0$ y $c_i''(q_i), d_i''(h_i) \leq 0$.

4.1. Modelo sin Precios Tope

En esta primera especificación resolveremos el modelo de escrutinio monopolístico estándar de la literatura económica[12], utilizando los supuestos presentados anteriormente. El problema queda expresado de la siguiente manera:

[12] Ver esquema genérico para este tipo de problemas en Laffont y Martimort (2002).

$$\text{máx}\,.\Pi = \beta\left[T_1 - c\left(q_1\right) - d\left(h_1\right)\right] + \left(1-\beta\right)\left[T_2 - c\left(q_2\right) - d\left(h_2\right)\right]$$

sujeto a:

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq 0 \qquad (1)$$

$$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq 0 \qquad (2)$$

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\left(q_2\right) + h_2 - T_2 \qquad (3)$$

$$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1 \qquad (4)$$

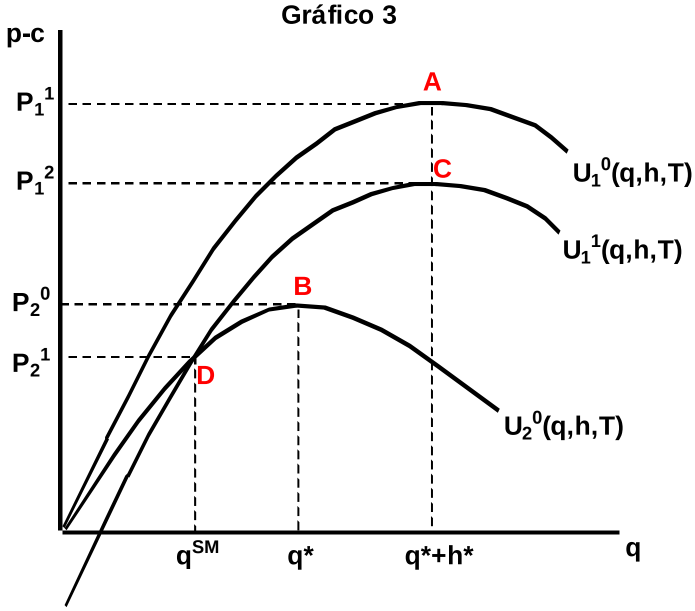
$$q_1, q_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 \geq 0$$

Las ecuaciones (1) y (2) son las restricciones de participación, el monopolista debe asegurarse de que la utilidad generada por el consumo de ambos bienes para los dos tipos de individuo sea mayor o igual a cero. Las ecuaciones (3) y (4) son las restricciones de compatibilidad de incentivos, es decir, el monopolista debe de asegurarse de que cada individuo consuma la canasta que la empresa a preparado de acuerdo a su tipología. Para esto el monopolista debe asegurar que la utilidad que un individuo obtenga consumiendo la canasta que le ha sido asignada dada su tipología sea mayor o igual que la utilidad que conseguiría consumiendo la canasta del otro tipo. Finalmente, las últimas restricciones en el modelo anterior son las de no negatividad.

Dado el problema anterior, en un contexto de información completa, el monopolista fijaría un precio que le permita extraer todo el excedente del consumidor, por lo que establecería una discriminación de precios dependiendo la disposición a pagar de los individuos. La solución al problema respetaría la estructura que iguala los ingresos marginales (IM) a los costos marginales (CM) y nos encontraríamos en los puntos A y B del gráfico 3.

En cambio, si la tipología de los individuos es no observable, el monopolista deberá ofrecer una canasta de precios y cantidades que le permita identificar la tipología de cada individuo, haciendo que ambos participen en el mercado e incentivándolos para no hacerse pasar por el tipo que no les corresponde (satisfacer la restricción de compatibilidad de incentivos). En ese caso nos encontraríamos en los puntos C y D del gráfico 3, en el cual se le da una renta informacional al individuo de tipo alto y se mantiene la estructura de IM=CM para este tipo de consumidor. Si al individuo de tipo alto se le ofreciera la canasta y el precio que representan al punto A en dicho gráfico, el individuo de tipo alto se trasladaría al punto B, a la canasta de consumo del tipo bajo, debido a que se encontraría en un nivel de utilidad mayor. El monopolista por eso decide reducir la cantidad vendida al individuo del tipo bajo, llevándolo al punto D, y subirle el precio al individuo de tipo alto hasta el punto en que la pérdida generada por una reducción de la cantidad vendida al tipo bajo sea igual a la ganancia obtenida de elevar el precio al tipo alto, en el cual la empresa será indiferente.

Gráfico 3



Si planteamos el resultado matemático del problema anterior bajo el supuesto de información incompleta obtenemos los siguientes resultados[13]:

$$\theta_1 v\acute{}\left(q_1^{SM}\right) = c\acute{}\left(q_1^{SM}\right)$$
$$1 = d\acute{}\left(h_1^{SM}\right)$$
$$\theta_2 v\acute{}\left(q_2^{SM}\right) = c\acute{}\left(q_2^{SM}\right) + \frac{\beta}{(1-\beta)}\left(\theta_1 - \theta_2\right) v\acute{}\left(q_2^{SM}\right)$$
$$h_2^{SM} = 0$$

Las dos primeras ecuaciones, relacionadas al tipo alto, mantienen la estructura de IM=CM. Pero la cantidad demandada del bien q_2 de la segunda especificación es menor que la cantidad demandada del problema con información completa, $q_2^{SM} < q_2^{E14}$, debido a que se le da una renta informacional al tipo alto. Con respecto al consumo de los servicios adicionales, la empresa le ofrece a los consumidores soluciones que igualan sus IM=CM, lo que hace que h_2^{SM} sea 0 debido a que le genera una utilidad nula al individuo de tipo 2 y por tanto

[13] Para ver el desarrollo detallado del problema revisar el Anexo 1.

[14] En esta especificación:

SM: Es el resultado que vamos a llamar de segundo mejor, debido a que se desprende de la solución del problema con información incompleta.

E: Es el resultado que vamos a llamar eficiente y se desprende de la solución del problema con información completa.

no va a querer consumir el bien. En conclusión, los problemas de información generan una reducción de los minutos ofrecidos a los individuos de tipo bajo llevándonos a un resultado de segundo mejor.

4.2. Modelo con Precios Tope

En esta sección, analizamos el modelo anterior incluyendo una restricción adicional que refleje el mecanismo regulatorio de precios tope que se encuentra en vigencia actualmente en el Perú, para poder comparar la respuesta de este problema con los resultados presentados anteriormente. El modelo ahora es el siguiente:

$$\text{máx}\,.\Pi = \beta \left[T_1 - c\left(q_1\right) - d\left(h_1\right)\right] + \left(1-\beta\right)\left[T_2 - c\left(q_2\right) - d\left(h_2\right)\right]$$

sujeto a:

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq 0 \tag{1}$$

$$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq 0 \tag{2}$$

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\left(q_2\right) + h_2 - T_2 \tag{3}$$

$$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1 \tag{4}$$

$$\alpha T_1 + \left(1-\alpha\right) T_2 \leq T \tag{5}$$

$$q_1, q_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 \geq 0$$

Esta especificación es la misma que en el caso anterior, pero se le ha aumentado la restricción (5) que representa la restricción de los precios tope, donde los α representan las ponderaciones en el price cap, las cuales asumiremos exógenas[15], y T representa el factor de control. Ante este problema se presentan tres posibles resultados[16]:

- Caso A: Si es que esta nueva restricción no limita y se cumple holgadamente, entonces los resultados obtenidos son los mismos que los obtenidos en la especificación con información incompleta.

Si la restricción (5) es limitante, entonces se presentan dos alternativas de solución que analizamos a continuación.

[15] Como hemos mencionado anteriormente el α en el Perú es igual a la participación de los ingresos de un producto determinado dentro de una canasta sujeta al esquema de precio tope en el periodo anterior.

[16] Para ver el desarrollo detallado de los siguientes casos revisar el Anexo 2.

- Caso B: La empresa deja de ofrecer productos para el consumidor de tipo bajo, retirándolo del mercado. Maximiza sus beneficios vendiendo únicamente el paquete correspondiente al individuo de tipo alto. Los resultados son los siguientes:

$$\theta_1 v\acute{}(q_1) = \frac{\beta}{\beta - \alpha} c\acute{}(q_1)$$
$$1 = \frac{\beta}{\beta - \alpha} d\acute{}(h_1)$$
$$q_2 = 0$$
$$h_2 = 0$$

  Estos resultados mantienen la misma estructura de IM=CM, pero la diferencia es que ahora los parámetros determinan el resultado. Una condición necesaria para obtener un resultado que nos lleve a un q_1 y un h_1 positivos es:
$$\beta > \alpha$$
  De lo contrario no existiría intercambio alguno en este mercado, el producto no se ofrecería. La desigualdad anterior, implica que la proporción de personas de tipo alto en la población sea mayor que la proporción que ellos generan en el ingreso total de la empresa, lo cual hace a este resultado muy poco probable.

- Caso C: Dependiendo los supuestos realizados sobre los parámetros, los resultados pueden ser los siguientes:

$$\theta_1 v\acute{}\left(q_1^{TM}\right) = \frac{\beta}{\beta - \mu_1\alpha} c\acute{}\left(q_1^{TM}\right)$$
$$1 = \frac{\beta}{\beta - \mu_1\alpha} d\acute{}\left(h_1^{TM}\right)$$
$$\theta_2 v\acute{}\left(q_2^{TM}\right) = \frac{1}{\mu_2} c\acute{}\left(q_2^{TM}\right) + \frac{\beta}{(1-\beta)}\left(\left(\frac{\beta - \mu_1\alpha}{\mu_2\beta}\right)\theta_1 - \theta_2\right) v\acute{}\left(q_2^{TM}\right)$$
$$h_2^{TM} = 0$$

  Aquí la estructura es bastante similar al caso inicial, aunque estamos en el tercer mejor(TM). Para el tipo alto se mantiene la estructura de IM=CM, pero el resultado depende fuertemente de los parámetros. Además, se le castiga de una mayor manera al individuo de tipo bajo para no darle demasiada renta informacional al tipo alto, $q_2^E > q_2^{SM} > q_2^{TM}$[17]. Mientras que la estructura del modelo aún no da incentivos a la empresa a tener un h_2 positivo.

[17] Este resultado es obvio dado que como se muestra en el Anexo 2, en esta especificación se cumple que $0 < \mu_2 < 1$.

4.3. Modelo con Precios Regulados y Precios No Regulados

Esta última especificación del modelo refleja de una manera más clara la realidad actual de la aplicación del esquema precios tope en el Perú. Sus resultados nos ayudarán a entender los incentivos generados a la empresa en estas circunstancias y sus efectos sobre los precios, cantidades y el bienestar social. El modelo original ahora queda expresado de la siguiente manera:

$$\text{máx}.\Pi = \beta\left[T_1 - c\left(q_1\right) - d\left(h_1\right)\right] + (1-\beta)\left[T_2 - c\left(q_2\right) - d\left(h_2\right)\right]$$

sujeto a:

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq 0 \quad (1)$$

$$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq 0 \quad (2)$$

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\left(q_2\right) + h_2 - T_2 \quad (3)$$

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\left(q_2\right) + h_2 - T_2 \quad (4)$$

$$\alpha\overline{T_1} + (1-\alpha)\,\overline{T_2} \leq T \quad (5)$$

$$T_1 = \overline{T_1} + ph_1 \quad (6)$$

$$T_2 = \overline{T_2} + ph_2 \quad (7)$$

$$q_1, q_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 \geq 0$$

En esta especificación, junto con las restricciones que hemos revisado en las secciones anteriores, se incluyeron dos restriciones más que desagregan el monto cobrado por la empresa a cada producto vendido (paquetes que atan servicios), lo que nos permite diferenciar la parte de este monto que está sujeta a la restricción por precios tope y la parte que no. La parte que corresponde a $\overline{T_1}$ y $\overline{T_2}$ reflejan el precio del bien q_1 y del bien q_2, mientras que el precio para el bien h_1 y h_2 es el mismo, p.

Con estas ecuaciones, se puede llegar a diferentes equilibrios, dependiendo de los supuestos realizados sobre los parámetros[18]:

- Caso A: Si la restricción que hace referencia a los precios tope no restringe, el problema de maximización es equivalente a un modelo de escrutinio (screening) sin regulación y con información incompleta como el visto en la sección 4.1.

[18] Para ver el desarrollo detallado de los diferentes casos presentados a continuación revisar el Anexo 3.

- Caso B: Es bastante parecido al que presentamos en el modelo con precios tope anterior donde todos los precios eran regulados (Caso B de la sección 4.2.), con la diferencia que se incrementa la producción de h_1, dependiendo del precio que éste bien tenga. Este caso es también poco probable porque al igual que en el caso ya citado se necesita que $\beta > \alpha$, y eso implica que la proporción de personas de tipo alto en la población sea mayor que la proporción de ingresos generada por ellos en el ingreso total de la empresa. La empresa deja de ofrecer productos para los consumidores de tipo bajo, retirándolos del mercado. Maximiza sus beneficios vendiendo únicamente el paquete correspondiente al individuo de tipo alto. Los resultados son los siguientes:

$$\theta_1 v'(q_1) = \frac{\beta}{\beta - \alpha} c'(q_1)$$
$$\alpha p + \beta - \alpha = \beta d'(h_1)$$
$$q_2 = 0$$
$$h_2 = 0$$

La libertad que tiene la empresa de manejar precios de servicios que se venden de manera atada y que no son regulados por el esquema de precios tope incentiva a la empresa a subir el precios de estos servicios adicionales, y por tanto su producción lo cual se apreciará de manera más clara en la siguiente especificación.

- Caso C: Se vende ambos paquetes pero el resultado afecta nuevamente al consumidor de tipo bajo, el cual es obligado a comprar un bien que no le brinda ninguna utilidad. Dado los parámetros h_2 puede ser positivo. Los resultados desde esta aproximación son los siguientes[19]:

$$\theta_1 v'(q_1) = \frac{\beta}{\beta - \mu_1 \alpha} c'(q_1)$$
$$1 + \frac{\alpha \mu_1 (p-1)}{\beta} = \beta d'(h_1)$$
$$\theta_2 v'(q_2) = \frac{1}{\mu_2} c'(q_2) + \frac{\beta}{(1-\beta)} \left(\left(\frac{\beta - \mu_1 \alpha}{\mu_2 \beta} \right) \theta_1 - \theta_2 \right) v'(q_2)$$
$$(1 - \mu_1 \alpha - \mu_2) p - \beta + \mu_1 \alpha = (1-\beta) d'(h_2)$$

[19]Los resultados de esta última especificación son los que no tienen ningún superíndice.

I. $q_1^E = q_1^{SM} > q_1^{TM} = q_1$, menor al de los resultados anteriores.

II. $h_1^E = h_1^{SM} < h_1$, mayor al de los resultados anteriores.

III. Esto se explica por la restricción de los precios tope. El monopolista para cobrar el mismo precio que antes, T_1 aumenta la cantidad vendida de h_1.

IV. Se sabe también que $q_2^E > q_2^{TM} = q_2$.

V. Dado los parámetros, h_2 puede ser positivo en algunos casos, lo cual hace que se venda un servicio a un consumidor que no le va a brindar ninguna utilidad. Este resultado es diferente a los anteriores que siempre presentaban un $h_2 = 0$. Para que este resultado positivo se de, el precio del servicio adicional debe de ser lo suficientemente alto, lo cual es probable que se cumpla dadas las libertades que tiene la empresa.

En conclusión, con esta última especificación se determina que cuando no todos los precios son regulados y se realizan ventas atadas, como es en el caso de los servicios adicionales, se saca al individuo de tipo bajo del mercado o se le obliga a los usuarios a consumir una mayor cantidad del servicio adicional en prejuicio de su consumo de minutos, e incluso al individuo de tipo bajo se le obliga consumir un bien por el cual no consigue ninguna utilidad. Esto claramente perjudica el bienestar de los consumidores si los comparamos con los resultados obtenidos de las especificaciones anteriores.

5. Conclusiones

La literatura económica muestra que, en ausencia de un esquema regulatorio, las empresas monopólicas principalmente tienen incentivos para empaquetar o realizar ventas atadas sólo cuando las preferencias de los individuos no cumplen la propiedad de un solo cruce (single crossing property), es decir, que tienen disposiciones a pagar "cruzadas" entre distintos servicios. Este supuesto es poco razonable para el servicio de telefonía en una economía como la peruana donde existe una importante diferencia de ingresos.

Incentivos para realizar ventas atadas emergen en el contexto de un esquema regulatorio de precios tope, cuando no todos los precios de los bienes que están incluidos dentro del paquete se ven afectados por dicha regulación.

El modelo desarrollado muestra que bajo determinadas condiciones una empresa monopólica sujeta a precios tope tiene incentivos para proveer servicios adicionales aún cuando estos puedan no reportar utilidad a un subconjunto de usuarios, o en que en otros casos retira a los individuos de tipo bajo del mercado.

Referencias

[1] Brennan, T.J.: "Regulating by Capping Prices," In: Einhorn, M. (Ed), Price Caps and Incentive Regulation in Telecommunications, Kluwer Academic Publishers, Boston. M.A., 1990.

[2] Besanko D., Donnenfeld S. y White L. The Multiproduct Firm, Quality Choice and Regulation. The Journal of Industrial Economics, Vol. 36, No. 4 (Jun., 1988), 411-429.

[3] Corts K. Regulation of a Multi-Product Monopolist: Effects on Pricing and Bundling. The Journal of Industrial Economics, Vol. 43, No. 4 (Dec., 1995) , 377-397.

[4] Laffont J.J. y D. Martimort. The Theory of Incentives: The Principal Agent - Model. Princeton University Press. 2002.

[5] Littlechild S.C y M.E. Beesley. The Regulation of Privatized Monopolies in the United Kingdom. The RAND Journal of Economics, Vol. 20 No. 3 (Autumn, 1989), 454-472.

[6] Sappington, David y Ai, Chunrong: "The Impact of State Incentive Regulation on the U.S. Telecommunications Industry", Journal of Regulatory Economics, Vol. 22, No. 2, 2002: 133-160.

[7] Sappington David y David Sibley. Strategic Nonlinear Pricing under Price Cap Regulation. The RAND Journal of Economics, Vol. 23, No. 1 (Spring 1992), pp. 1-19

[8] Shy, O. Industrial Organization, Theory and applications. Capítulo 14: Marketing tactics: Bundling, Upgrading and Dealerships. Capítulo 15: Monitoring, Management, Compensation and Regulation. The MIT Press 1996.

[9] Pepall, Richard y Norman. Industrial Organization: Contemporary Theory and Practice. Third Edition. 2005.

[10] OSIPTEL. Determinación del factor de productividad en la prestación del servicio telefónico basico como parte del modelo de regulación tarifaria en el sector telecomunicaciones. Documento de Trabajo No. 62. Julio 2001.

[11] OSIPTEL. Revisión del Factor de Productividad correspondiente al régimen de Fórmula de Tarifas Tope para Telefónica del Perú S.A.A.: Segunda Aplicación, 2004-2007. Julio 2004.

[12] OSIPTEL. Contratos de Concesión con CPT S.A. ENTEL Perú S.A. (Hoy Telefónica del Perú). Lima, Octubre 2001.

Anexos

A. Modelo sin Precios Tope

Resolvemos el modelo siguiente:

$$\text{máx}\,.\Pi = \beta\left[T_1 - c\left(q_1\right) - d\left(h_1\right)\right] + \left(1-\beta\right)\left[T_2 - c\left(q_2\right) - d\left(h_2\right)\right]$$

sujeto a:

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq 0 \tag{A.1}$$

$$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq 0 \tag{A.2}$$

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\left(q_2\right) + h_2 - T_2 \tag{A.3}$$

$$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1 \tag{A.4}$$

$$q_1, q_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 \geq 0$$

Las restricciones (A.1) y (A.2) hacen referencia a las restricciones de participación que exigen que los individuos deben de tener una utilidad neta mayor o igual a cero para que decidan participar en el mercado. Las restricciones (A.3) y (A.4) hacen referencia a la restricción de compatibilidad de incentivos que permite que cada individuo se autoseleccione en el tipo que le corresponde y no se haga pasar por un individuo de otro tipo. Finalmente se encuentran las restricciones de no negatividad para cantidades consumidas. Este es un problema típico de escrutinio monopolístico.

Sabemos además que existen dos tipos de individuos en la economía y que se cumple la condición de un sólo cruce, el individuo 1 está dispuesto a pagar más por el bien q, $(\theta_1 > \theta_2)$, así como por el bien h. Conocemos tatmbién que la función $v\left(\cdot\right)$ determina la disposición a pagar de los individuos por el bien q_i y que es una función cóncava y creciente. Además las funciones de costos correspondientes a los bienes q_i y h_i, $c\left(\cdot\right)$ y $d\left(\cdot\right)$ son funciones convexas y crecientes.

Se cumple la condición de MPSC (multiproduct single croosing) en las preferencias de los individuos donde el tipo 1 tiene mayores valoraciones por ambos bienes (q y h) que el tipo 2. Las funciones de utilidad son las siguientes:

$$U_1(q_1, h_1, T_1) = \theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1$$

$$U_2(q_2, h_2, T_2) = \theta_2 v\left(q_2\right) - T_2$$

Ahora demostraremos que la restricción (A.1) se cumple cuando tomamos en cuenta las restricciones (A.2) y (A.3). Por (A.3), sabemos que:

$$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\left(q_2\right) + h_2 - T_2$$

Como $\theta_1 > \theta_2$, entonces siempre es cierto que:
$\theta_1 v(q_1) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v(q_2) + h_2 - T_2 \geq \theta_2 v(q_2) - T_2 \geq 0$ (A.5)
Por lo tanto:
$\theta_1 v(q_1) + h_1 - T_1 \geq 0$

Además, desde que la utilidad del individuo de tipo bajo debe de ser mayor o igual que cero para que participe en el mercado, $U(q_2) \geq 0$ y dado que $\theta_1 > \theta_2$, entonces se desprende de manera intuitiva que el monopolista subirá T_2 hasta que la utilidad del individuo de tipología más baja sea cero sin afectar las desigualdades establecidas en (A.5). Al mismo tiempo tratará de elevar lo máximo T_1, hasta que la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo más alto se cumpla con igualdad. Entonces tendríamos que (A.5) puede ser expresado de la siguiente manera: $\theta_1 v(q_1) + h_1 - T_1 = \theta_1 v(q_2) + h_2 - T_2 \geq \theta_2 v(q_2) - T_2 = 0$, lo que significa que (A.2) y (A.3) se cumplen con igualdad.

Luego, si sumamos lado a lado la restricción de compatibilidad de ambos tipos obtenemos:

$$\theta_1 v(q_1) + h_1 - T_1 + \theta_2 v(q_2) - T_2 \geq \theta_1 v(q_2) + h_2 - T_2 + \theta_2 v(q_1) - T_1$$
$$\theta_1 (v(q_1) - v(q_2)) + h_1 - h_2 \geq \theta_2 (v(q_1) - v(q_2)) \quad \text{(A.6)}$$

Finalmente, dado que la restricción de participación del tipo bajo (A.2) y la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo alto (A.3) se cumplen con igualdad, tomando la ecuación (A.6) se puede demostrar que se cumple la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo bajo (A.4):

$\theta_1 v(q_1) + h_1 - T_1 = \theta_1 v(q_2) + h_2 - T_2$
Utilizando la ecuación (A.6):
$T_1 - T_2 = \theta_1 (v(q_1) - v(q_2)) + h_1 - h_2 \geq \theta_2 (v(q_1) - v(q_2))$
entonces:
$T_1 - T_2 \geq \theta_2 (v(q_1) - v(q_2))$
$\theta_2 v(q_2) - T_2 \geq \theta_2 v(q_1) - T_1$

Entonces el problema queda finalmente expresado de la siguiente manera:

$$\text{máx}.\Pi = \beta [T_1 - c(q_1) - d(h_1)] + (1-\beta) [T_2 - c(q_2) - d(h_2)]$$

sujeto a:

$$\theta_2 v(q_2) - T_2 = 0$$

$$\theta_1 v(q_1) + h_1 - T_1 = \theta_1 v(q_2) + h_2 - T_2$$

$$q_1, q_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 \geq 0$$

De estas expresiones obtenemos los siguientes resultados:

$T_2 = \theta_2 v(q_2)$
$T_1 = (\theta_2 - \theta_1) v(q_2) + (h_1 - h_2) + \theta_1 v(q_1)$

Por lo tanto maximizamos:

$$\text{máx}.\Pi = \beta\left[(\theta_2 - \theta_1) v(q_2) + (h_1 - h_2) + \theta_1 v(q_1) - c(q_1) - d(h_1)\right] + (1-\beta)\left[\theta_2 v(q_2) - c(q_2) - d(h_2)\right]$$

A continuación presentamos las condiciones de primer orden que nos permitirán solucionar el problema:

$q_1 \left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) = q_1 \left[\beta\theta_1 v'(q_1) - \beta c'(q_1)\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \beta\theta_1 v'(q_1) - \beta c'(q_1) \leq 0$
$q_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\theta_1 v'(q_1) = c'(q_1)$

$q_2 \left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right) = q_2 \left[-\beta(\theta_1 - \theta_2) v'(q_2) + (1-\beta)\theta_2 v'(q_2) - (1-\beta) c'(q_2)\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\beta(\theta_1 - \theta_2) v'(q_2) + (1-\beta)\theta_2 v'(q_2) - (1-\beta) c'(q_2) \leq 0$
$q_2 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\theta_2 v'(q_2) = c'(q_2) + \frac{\beta}{(1-\beta)}(\theta_1 - \theta_2) v'(q_2)$

$h_1 \left(\frac{\partial L}{\partial h_1}\right) = h_1 \left[\beta - \beta d'(h_1)\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial h_1} = \beta - \beta d'(h_1) \leq 0$
$h_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$1 = d'(h_1)$

$h_2 \left(\frac{\partial L}{\partial h_2}\right) = h_2 \left[-(1-\beta) d'(h_2)\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial h_2} = -(1-\beta) d'(h_2) < 0$
$h_2 = 0$

B. Modelo con Precios Tope

Resolvemos el modelo siguiente:

$$\text{máx}.\Pi = \beta\left[T_1 - c(q_1) - d(h_1)\right] + (1-\beta)\left[T_2 - c(q_2) - d(h_2)\right]$$

sujeto a:

$$\theta_1 v\,(q_1) + h_1 - T_1 \geq 0 \tag{B.1}$$

$$\theta_2 v\,(q_2) - T_2 \geq 0 \tag{B.2}$$

$$\theta_1 v\,(q_1) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\,(q_2) + h_2 - T_2 \tag{B.3}$$

$$\theta_2 v\,(q_2) - T_2 \geq \theta_2 v\,(q_1) - T_1 \tag{B.4}$$

$$\alpha\overline{T_1} + (1-\alpha)\,\overline{T_2} \leq T \tag{B.5}$$

$$q_1, q_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 \geq 0$$

La especificación es similar a la del anexo anterior, con la diferencia que se incluye la restricción (B.5) que refleja el esquema regulatorio de Precios Tope. Finalmente se encuentran las restricciones de no negatividada para cantidades consumidas. Las funciones de utilidad siguen siendo las mismas que en el problema anterior:

$$U_1(q_1, h_1, T_1) = \theta_1 v\,(q_1) + h_1 - T_1$$
$$U_2(q_2, h_2, T_2) = \theta_2 v\,(q_2) - T_2$$

Al igual que en la especificación estándar del problema de escrutinio monopolístico revisada en el Anexo 1, podemos demostrar que dadas las restricciones (B.2) y (B.3), la restricción (B.1) es innecesaria porque está de manera implícita en las otras dos. En adición, relajamos el problema asumiendo que la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo bajo (B.4) se cumple, lo cual se será comprobado al finalizar la resolución del problema una vez obtenida las soluciones para las distintas variables. Por lo tanto, el problema anterior queda reexpresado de la siguiente manera:

$$\text{máx}\,.\Pi = \beta\,[T_1 - c\,(q_1) - d\,(h_1)] + (1-\beta)\,[T_2 - c\,(q_2) - d\,(h_2)]$$

sujeto a:

$$\theta_2 v\,(q_2) - T_2 \geq 0$$
$$\theta_1 v\,(q_1) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\,(q_2) + h_2 - T_2$$
$$\alpha T_1 + (1-\alpha)\,T_2 \leq T$$
$$q_1, q_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 \geq 0$$

Si observamos el problema presentado, producir h_2, es un costo para la empresa que no le genera ningún beneficio ni a ellos, ni a los consumidores de tipo 2. Si a esto agregamos el hecho que permitiría que se cumpla de manera más clara la restricción de compatibilidada de incentivos del tipo alto si este valor fuera cero, entonces se puede concluir con anticipación que :

$$h_2 = 0$$

Haciendo el lagrangiano para poder hallar los resultados y tomando en cuenta la igualdad anterior tenemos:

$$\begin{aligned} L &= \beta\left[T_1 - c\left(q_1\right) - d\left(h_1\right)\right] + \left(1-\beta\right)\left[T_2 - c\left(q_2\right)\right] \\ & -\mu_1\left[\alpha T_1 + \left(1-\alpha\right)T_2 - T\right] + \mu_2\left[\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2\right] \\ & +\lambda_1\left[\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - T_1 - \theta_1 v\left(q_2\right) + T_2\ \right] \end{aligned}$$

A continuación presentamos las condiciones de primer orden que nos permitirán solucionar el problema:

$q_1\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) = q_1\left[-\beta \acute{c}(q_1) + \lambda_1\theta_1\acute{v}(q_1)\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\beta\acute{c}(q_1) + \lambda_1\theta_1\acute{v}(q_1) \leq 0$
$q_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\lambda_1\theta_1\acute{v}(q_1) = \beta\acute{c}(q_1)$

$q_2\left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right) = q_2\left[-\left(1-\beta\right)\acute{c}(q_2) + \mu_2\theta_2\acute{v}(q_2) - \lambda_1\theta_1\acute{v}(q_2)\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -\left(1-\beta\right)\acute{c}(q_2) + \mu_2\theta_2\acute{v}(q_2) - \lambda_1\theta_1\acute{v}(q_2) \leq 0$
$q_2 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\mu_2\theta_2\acute{v}(q_2) = \left(1-\beta\right)\acute{c}(q_2) + \lambda_1\theta_1\acute{v}(q_2)$

$h_1\left(\frac{\partial L}{\partial h_1}\right) = h_1\left[-\beta\acute{d}(h_1) + \lambda_1\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial h_1} = -\beta\acute{d}(h_1) + \lambda_1 \leq 0$
$h_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\lambda_1 = \beta\acute{d}(h_1)$

Ahora derivamos con respecto a las variables que determinan el precio que cobra la empresa por los servicios que otorga y con respectos a los multiplicadores lagrangianos de las diferentes restricciones:

$$\frac{\partial L}{\partial T_1} = \beta - \mu_1\alpha - \lambda_1 = 0 \tag{B.6}$$
$$\frac{\partial L}{\partial T_2} = \left(1-\beta\right) - \left(1-\alpha\right)\mu_1 - \mu_2 + \lambda_1 = 0 \tag{B.7}$$

$\mu_1\left(\frac{\partial L}{\partial \mu_1}\right) = \mu_1\left[T - \alpha T_1 - \left(1-\alpha\right)T_2\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = T - \alpha T_1 - \left(1-\alpha\right)T_2 \geq 0$
$\mu_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$T = \alpha T_1 + \left(1-\alpha\right)T_2$

$\mu_2\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right)=\mu_2\left[\theta_2 v\left(q_2\right)-T_2\right]=0$
$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}=\theta_2 v\left(q_2\right)-T_2 \geq 0$
$\mu_2 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\theta_2 v\left(q_2\right)=T_2$

$\lambda_1\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right)=\lambda_1\left[\theta_1 v\left(q_1\right)+h_1-T_1-\theta_1 v\left(q_2\right)+T_2\right]=0$
$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}=\theta_1 v\left(q_1\right)+h_1-T_1-\theta_1 v\left(q_2\right)+T_2 \geq 0$
$\lambda_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\theta_1 v\left(q_1\right)+h_1-T_1=\theta_1 v\left(q_2\right)-T_2$

Dados estos resultados, para poder encontrar los diferentes equilibrios debemos hacer ciertos supuestos sobre las variables. En primer lugar, si asumimos que λ_1 es igual a 0 entonces dados los resultados vemos que q_1 y h_1 serán iguales a cero. Por lo que no se vendería dicho producto a los individuos del tipo alto. Además, dada la restricción de compatilidad de incentivos del tipo alto en el problema propuesto (B.3), para que exista un equilibrio debería cumplirse que q_2 también debe ser igual a cero. En este equilibrio no existe mercado, por lo tanto no lo analizaremos. Por los tanto asumimos que $\lambda_1 > 0$ de aquí en adelante, con lo cual entonces podemos obtener las siguientes igualdades como ciertas, asumiendo $q_1 > 0$ y $h_1 > 0$:

$$\lambda_1 \theta_1 v'(q_1)=\beta c'(q_1)$$
$$\lambda_1=\beta d'(h_1)$$

Además, sumando (B.6) y (B.7), obtenemos la siguiente condición:
$1=\mu_1+\mu_2$
Dada esta condición tenemos 3 posibles opciones que resuelven este problema:
a) Si $\mu_1=0$ y $\mu_2=1$, se regresa al caso normal sin Precios Tope. Entonces los resultados son los siguientes:

Parámetros:

$\beta=\lambda_1$

Precios:

$T_2=\theta_2 v\left(q_2\right)$

$T_1=\theta_1 v\left(q_1\right)-\theta_1 v\left(q_2\right)+h_1+\theta_2 v\left(q_2\right)$

Cantidades:

$\theta_1 v'(q_1)=c'(q_1)$

$\theta_2 v'(q_2)=c'(q_2)+\frac{\beta}{(1-\beta)}\left(\theta_1-\theta_2\right) v'(q_2)$

$1=\beta d'(h_1)$

$h_2=0$

b) Si $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 0$, entonces esto obliga a que $q_2 = 0$, dado que el h_2 también es igual a cero, esto implica que se saca al individuo dos del mercado. Con estos resultados se llega a las siguientes ecuaciones:

Parámetros:

$\beta - \alpha = \lambda_1$

Precios:

$T_2 = 0$

$T_1 = \theta_1 v\left(q_1\right) + h_1$

Cantidades:

$\theta_1 v\acute{}(q_1) = \frac{\beta}{\beta-\alpha} c\acute{}(q_1)$

$1 = \frac{\beta}{\beta-\alpha} d\acute{}(h_1)$

$q_2 = 0$

$h_2 = 0$

En este resultado se deja de lado al individuo de menor tipo, se le saca del mercado. Ahora debemos demostrar que la restricción que habíamos relajado en la parte de la resolución general se cumple con este equilibrio, es decir si se cumple la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo bajo. La ecuación que tenemos que mostrar que se cumple es la siguiente:

$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1$

Sabemos que $q_2 = 0$ y que la función $v\left(\cdot\right)$ es monotónica que empieza en cero, además T_2 es cero entonces:

$0 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1$

$T_1 \geq \theta_2 v\left(q_1\right)$

Pero también sabemos el valor de T_1 :

$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 \geq \theta_2 v\left(q_1\right)$

Como $\theta_1 \geq \theta_2$ entonces la restricción (B.4) es satisfecha.

c) La otra alternativa de resolución es que $1 > \mu_1, \mu_2 > 0$, donde los resultados son los siguientes:

Parámetros:

$1 = \mu_1 + \mu_2$

$\beta - \mu_1 \alpha = \lambda_1$

Precios:

$T = \alpha T_1 + \left(1-\alpha\right) T_2$

$T_2 = \theta_2 v\left(q_2\right)$

$T_1 = \theta_1 v\left(q_1\right) - \theta_1 v\left(q_2\right) + h_1 - h_2 + \theta_2 v\left(q_2\right)$

Cantidades:

$\theta_1 v\acute{}(q_1) = \frac{\beta}{\beta-\mu_1\alpha} c\acute{}(q_1)$
$1 = \frac{\beta}{\beta-\mu_1\alpha} d\acute{}(h_1)$
$\mu_2\theta_2 v\acute{}(q_2) = (1-\beta)\, c\acute{}(q_2) + \lambda_1\theta_1 v\,(q_2)$ ó $\theta_2 v\acute{}(q_2) = \frac{1}{\mu_2} c\acute{}(q_2) + \frac{\beta}{(1-\beta)}\left(\left(\frac{\beta-\mu_1\alpha}{\mu_2\beta}\right)\theta_1 - \theta_2\right) v\,(q_2)$
$h_2 = 0$

De la misma manera que en el caso b) debemos demostrar que la restricción que habíamos relajado en la parte de la resolución general se cumple con este resultado, es decir si se cumple la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo bajo. Nuevamente se debe de cumplir que:
$\theta_2 v\,(q_2) - T_2 \geq \theta_2 v\,(q_1) - T_1$
Sabemos que $T_2 = \theta_2 v\,(q_2)$, entonces:

$0 \geq \theta_2 v\,(q_1) - T_1$
$T_1 \geq \theta_2 v\,(q_1)$
Pero también sabemos el valor de T_1:
$\theta_1 v\,(q_1) - \theta_1 v\,(q_2) + h_1 - h_2 + \theta_2 v\,(q_2) \geq \theta_2 v\,(q_1)$
$\theta_1\,(v\,(q_1) - v\,(q_2)) + h_1 \geq \theta_2\,(v\,(q_1) - v\,(q_2)) + h_2$
Sabemos que $h_2 = 0$ y que $\theta_1 > \theta_2$, por lo tanto el supuesto que habíamos realizado era correcto, y la restricción (B.4) si se cumple.

C. Modelo con Precios Regulados y Precios No Regulados

Resolvemos el modelo siguiente:

$$\text{máx}\,.\Pi = \beta\,[T_1 - c\,(q_1) - d\,(h_1)] + (1-\beta)\,[T_2 - c\,(q_2) - d\,(h_2)]$$

sujeto a:

$$\theta_1 v\,(q_1) + h_1 - T_1 \geq 0 \tag{C.1}$$
$$\theta_2 v\,(q_2) - T_2 \geq 0 \tag{C.2}$$
$$\theta_1 v\,(q_1) + h_1 - T_1 \geq \theta_1 v\,(q_2) + h_2 - T_2 \tag{C.3}$$
$$\theta_2 v\,(q_2) - T_2 \geq \theta_2 v\,(q_1) - T_1 \tag{C.4}$$
$$\alpha\overline{T_1} + (1-\alpha)\,\overline{T_2} \leq T \tag{C.5}$$
$$T_1 = \overline{T_1} + ph_1 \tag{C.6}$$
$$T_2 = \overline{T_2} + ph_2 \tag{C.7}$$
$$q_1, q_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 \geq 0$$

Las restricciones (C.1) y (C.2) hacen referencia a las restricciones de participación que exigen que los individuos deben de tener un utilidad neta mayor o igual a cero. Las restricciones (C.3) y (C.4) hacen referencia a la restricción de compatibilidad de incentivos que permite que cada individuo se autiseleecione en el tipo que le corresponde y no se haga pasar por un individuo de otro tipo. La restricción (C.5) es la que refleja el esquema regulatorio de Precio Tope. Las restricciones (C.6) y (C.7) nos desagregan el precio total cobrado por la empresa para cada paquete en su parte sujeta al precio tope y la que no está sujeta a este mecanismo. Finalemente se encuentran las restricciones de no negatividada para cantidades consumidas. Las funciones de utilidad son las siguientes:

$$U_1(q_1, h_1, T_1) = \theta_1 v(q_1) + h_1 - T_1$$

$$U_2(q_2, h_2, T_2) = \theta_2 v(q_2) - T_2$$

Similar a los dos anexos previos, la restricción (C.1) se cumple implícitamente en las restricciones (C.2) y (C.3). Además, al igual que en el anexo dos, relajamos el problema asumiendo que la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo bajo (C.4) se cumple, lo cual se será comprobado luego. Por lo tanto, nuestro problema queda como sigue si reemplazamos los T_i respectivos:

$$\text{máx}\,.\Pi = \beta\left[\overline{T_1} + ph_1 - c(q_1) - d(h_1)\right] + (1-\beta)\left[\overline{T_2} + ph_2 - c(q_2) - d(h_2)\right]$$

sujeto a:

$$\theta_2 v(q_2) - \overline{T_2} - ph_2 \geq 0$$

$$\theta_1 v(q_1) + h_1 - \overline{T_1} - ph_1 \geq \theta_1 v(q_2) + h_2 - \overline{T_2} - ph_2$$

$$\alpha\overline{T_1} + (1-\alpha)\overline{T_2} \leq T$$

$$q_1, q_2 > 0 \quad \text{y} \quad h_1, h_2 > 0$$

Hacemos el lagrangiano para poder hallar los resultados:

$$\begin{aligned} L \;=\; & \beta\left[\overline{T_1} + ph_1 - c(q_1) - d(h_1)\right] + (1-\beta)\left[\overline{T_2} + ph_2 - c(q_2) - d(h_2)\right] \\ & -\mu_1\left[\alpha\overline{T_1} + (1-\alpha)\overline{T_2} - T\right] + \mu_2\left[\theta_2 v(q_2) - \overline{T_2} - ph_2\right] \\ & +\lambda_1\left[\theta_1 v(q_1) + h_1 - \overline{T_1} - ph_1 - \theta_1 v(q_2) - h_2 + \overline{T_2} + ph_2\right] \end{aligned}$$

A continuación presentamos las condiciones de primer orden que nos permitirán solucionar el problema:

$$q_1\left(\frac{\partial L}{\partial q_1}\right) = q_1\left[-\beta c'(q_1) + \lambda_1\theta_1 v'(q_1)\right] = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\beta \acute{c}(q_1) + \lambda_1 \theta_1 \acute{v}(q_1) \leq 0$
$q_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\lambda_1 \theta_1 \acute{v}(q_1) = \beta \acute{c}(q_1)$
$\lambda_1 = \frac{\beta \acute{c}(q_1)}{\theta_1 \acute{v}(q_1)}$

$q_2 \left(\frac{\partial L}{\partial q_2}\right) = q_2 \left[-(1-\beta) \acute{c}(q_2) + \mu_2 \theta_2 \acute{v}(q_2) - \lambda_1 \theta_1 \acute{v}(q_2)\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -(1-\beta) \acute{c}(q_2) + \mu_2 \theta_2 \acute{v}(q_2) - \lambda_1 \theta_1 \acute{v}(q_2) \leq 0$
$q_2 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\mu_2 \theta_2 \acute{v}(q_2) = (1-\beta) \acute{c}(q_2) + \lambda_1 \theta_1 \acute{v}(q_2)$

$h_1 \left(\frac{\partial L}{\partial h_1}\right) = h_1 \left[\beta p - \beta \acute{d}(h_1) + \lambda_1 - \lambda_1 p\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial h_1} = \beta p - \beta \acute{d}(h_1) + \lambda_1 - \lambda_1 p \leq 0$
$h_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$(\beta - \lambda_1) p + \lambda_1 = \beta \acute{d}(h_1)$

$h_2 \left(\frac{\partial L}{\partial h_2}\right) = h_2 \left[(1-\beta) p - (1-\beta) \acute{d}(h_2) - \mu_2 p - \lambda_1 + \lambda_1 p\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial h_2} = (1-\beta) p - (1-\beta) \acute{d}(h_2) - \mu_2 p - \lambda_1 + \lambda_1 p < 0$
$h_2 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$(1 - \beta - \mu_2 + \lambda_1) p = (1-\beta) \acute{d}(h_2) + \lambda_1$

Ahora derivamos con respecto a las variables que determinan el precio que cobra la empresa por los servicios que otorga y con respectos a los multiplicadores lagrangianos de las diferentes restricciones:

$$\frac{\partial L}{\partial \overline{T_1}} = \beta - \mu_1 \alpha - \lambda_1 = 0 \tag{C.8}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \overline{T_2}} = (1-\beta) - (1-\alpha) \mu_1 - \mu_2 + \lambda_1 = 0 \tag{C.9}$$

$\mu_1 \left(\frac{\partial L}{\partial \mu_1}\right) = \mu_1 \left[T - \alpha \overline{T_1} - (1-\alpha) \overline{T_2}\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = T - \alpha \overline{T_1} - (1-\alpha) \overline{T_2} \geq 0$
$\mu_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$T = \alpha \overline{T_1} + (1-\alpha) \overline{T_2}$

$\mu_2 \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right) = \mu_2 \left[\theta_2 v(q_2) - p h_2 - \overline{T_2}\right] = 0$
$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \theta_2 v(q_2) - p h_2 - \overline{T_2} \geq 0$
$\mu_2 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\theta_2 v(q_2) = p h_2 + \overline{T_2}$

$\lambda_1 \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right) = \lambda_1 \left(\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - \overline{T_1} - ph_1 - \theta_1 v\left(q_2\right) - h_2 + \overline{T_2} + ph_2\right) = 0$
$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - \overline{T_1} - ph_1 - \theta_1 v\left(q_2\right) - h_2 + \overline{T_2} + ph_2 \geq 0$
$\lambda_1 \geq 0$
Si es diferente a cero entonces:
$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - \overline{T_1} - ph_1 = \theta_1 v\left(q_2\right) + h_2 - \overline{T_2} - ph_2$

Si λ_1 es igual a 0 entonces también $q_1 = 0$, pero debido a que en este contexto h_1 es un servicio adicional en los planes de telefonía básica, no tiene sentido sin dicho servicio por lo cual h_1 sería 0. Con este resultado es sencillo mostrar que dadas las restricciones el único equilibrio posible sería con q_2 y h_2 iguales a cero, es decir con estos supuestos no hay mercado lo que nos da un resultado poco interesante. Por este motivo nos concentraremos en el caso en que λ_1 es mayor a cero y por ende $q_1 > 0$. Con esos supuestos sabemos que:

$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - \overline{T_1} - ph_1 = \theta_1 v\left(q_2\right) + h_2 - \overline{T_2} - ph_2$, y
$\lambda_1 \theta_1 v\acute{}(q_1) = \beta c\acute{}(q_1)$

Además, sumando (C.8) y (C.9), obtenemos:
$1 = \mu_1 + \mu_2$
Con las condiciones anteriores tenemos tres posibles equilibrios en este problema:
a) Si $\mu_1 = 0$ y $\mu_2 = 1$, se regresa al caso normal sin Precios Tope, debido a que esa restricción no limita. Los resultados son los siguientes:

Parámetros:
$\beta = \lambda_1$
Precios:
$T = \alpha \overline{T}_1 + (1-\alpha) \overline{T}_2$
$\overline{T}_2 = \theta_2 v\left(q_2\right) - ph_2$
$T_2 = \theta_2 v\left(q_2\right)$
$\overline{T}_1 = \theta_1 v\left(q_1\right) - \theta_1 v\left(q_2\right) + h_1 - h_2 + \theta_2 v\left(q_2\right) - ph_1$
$T_1 = \theta_1 v\left(q_1\right) - \theta_1 v\left(q_2\right) + h_1 - h_2 + \theta_2 v\left(q_2\right)$
Cantidades:
$\theta_1 v\acute{}(q_1) = c\acute{}(q_1)$
$\theta_2 v\acute{}(q_2) = (1-\beta) c\acute{}(q_2) + \beta\theta_1 v\acute{}(q_2)$ ó $\theta_2 v\acute{}(q_2) = c\acute{}(q_2) + \frac{\beta}{(1-\beta)} \left(\theta_1 - \theta_2\right) v\acute{}(q_2)$
$1 = \beta d\acute{}(h_1)$
$h_2 = 0$

b) Si $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 0$, entonces esto obliga a que $q_2 = 0$, como explicamos anteriormente no tiene sentido vender h_2 sino se vende el producto de telefonía básica, porque es un servicio adicional. Por lo cual h_2 también sería igual a cero. Con estos resultados se llega a las siguientes ecuaciones:

Parámetros:

$\beta - \alpha = \lambda_1$

Precios:

$T = \alpha \overline{T}_1$

$T_2 = 0$

$\overline{T}_2 = 0$

$\overline{T}_1 = \theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 - ph_1$

$T_1 = \theta_1 v\left(q_1\right) + h_1$

Cantidades:

$\theta_1 v\acute{}(q_1) = \frac{\beta}{\beta - \alpha} c\acute{}(q_1)$

$q_2 = 0$

$\alpha p + \beta - \alpha = \beta d\check{}(h_1)$

$h_2 = 0$

En este resultado se deja de lado al individuo de menor tipo, se le saca del mercado. Ahora debemos demostrar que la restricción que habíamos relajado en la parte de la resolución general se cumple con este resultado, es decir si se cumple la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo bajo. La ecuación que tenemos que mostrar que se cumple es la siguiente:

$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1$

Sabemos que $q_2 = 0$ y que la función $v\left(\cdot\right)$ es monotónica y empieza en cero. Entonces y teniendo en cuenta que T_2 también es cero, tenemos:

$0 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1$
$T_1 \geq \theta_2 v\left(q_1\right)$
Reemplazando el valor de T_1:
$\theta_1 v\left(q_1\right) + h_1 \geq \theta_2 v\left(q_1\right)$
Como $\theta_1 \geq \theta_2$, queda demostrado que la restricción se cumple.

c) Finalmente, la última alternativa es que $1 > \mu_1, \mu_2 > 0$, con lo cual tenemos los siguientes resultados:

Parámetros:

$1 = \mu_1 + \mu_2$

$\beta - \mu_1 \alpha = \lambda_1$

Precios:

$T = \alpha \overline{T}_1 + \left(1 - \alpha\right) \overline{T}_2$

$\overline{T}_2 = \theta_2 v\left(q_2\right) - ph_2$

$T_2 = \theta_2 v\left(q_2\right)$
$\overline{T}_1 = \theta_1 v\left(q_1\right) - \theta_1 v\left(q_2\right) + h_1 - h_2 + \theta_2 v\left(q_2\right) - ph_1$
$T_1 = \theta_1 v\left(q_1\right) - \theta_1 v\left(q_2\right) + h_1 - h_2 + \theta_2 v\left(q_2\right)$
Cantidades:
$\theta_1 v\acute{}(q_1) = \frac{\beta}{\beta - \mu_1 \alpha} c\acute{}(q_1)$
$\mu_2 \theta_2 v\acute{}(q_2) = (1-\beta)\, c\acute{}(q_2) + \lambda_1 \theta_1 v\left(q_2\right) \quad$ ó
$\theta_2 v\acute{}(q_2) = \frac{1}{\mu_2} c\acute{}(q_2) + \frac{\beta}{(1-\beta)} \left(\left(\frac{\beta - \mu_1 \alpha}{\mu_2 \beta}\right) \theta_1 - \theta_2\right) v\left(q_2\right)$
$\alpha \mu_1 p + \beta - \mu_1 \alpha = \beta d\acute{}(h_1)$
$(1 - \mu_1 \alpha - \mu_2)\, p - \beta + \mu_1 \alpha = (1-\beta)\, d\acute{}(h_2)$

En este resultado se le obliga a los consumidores a consumir una mayor cantidad del servicio adicional (h_i) en prejuicio de su consumo de minutos (q_i), e incluso al individuo de tipo bajo se le obliga consumir un bien por el cual no consigue ninguna utilidad. Ahora debemos demostrar, al igual que en el caso b) que la restricción que habíamos relajado en la parte de la resolución general se cumple con este resultado, es decir si se cumple la restricción de compatibilidad de incentivos del tipo bajo. La ecuación que tenemos que mostrar que se cumple es la siguiente:

$\theta_2 v\left(q_2\right) - T_2 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1$

Sabemos que $T_2 = \theta_2 v\left(q_2\right)$, entonces:

$0 \geq \theta_2 v\left(q_1\right) - T_1$
$T_1 \geq \theta_2 v\left(q_1\right)$
Pero también sabemos el valor de T_1:
$\theta_1 v\left(q_1\right) - \theta_1 v\left(q_2\right) + h_1 - h_2 + \theta_2 v\left(q_2\right) \geq \theta_2 v\left(q_1\right)$
$\theta_1 \left(v\left(q_1\right) - v\left(q_2\right)\right) + h_1 \geq \theta_2 \left(v\left(q_1\right) - v\left(q_2\right)\right) + h_2$

Esto se cumple cuando $h_1 > h_2$, para demostrar si esta última afirmación es cierta, notemos que la función de costos $d\left(\cdot\right)$ es convexa y creciente, por lo cual siempre que tengamos $\hat{h}$ y $\bar{h}$ que pertenecen al dominio de la función $d\left(\cdot\right)$, si $\hat{h} > \bar{h}$, entonces se cumple que $d\left(\hat{h}\right) > d\left(\bar{h}\right)$. Si ahora despejamos las expresiones correspondientes a los servicios h_1 y h_2, obtenemos:
$d\acute{}(h_1) = \frac{\alpha \mu_1 p - \mu_1 \alpha}{\beta} + 1$, y
$d\acute{}(h_2) = \frac{(1-\mu_1\alpha-\mu_2)p + \mu_1 \alpha}{(1-\beta)} - \frac{\beta}{(1-\beta)}$
Dada la proposición del párrafo anterior, si es verdad que $h_1 > h_2$, entonces se debe cumplir que $d\left(h_1\right) > d\left(h_2\right)$, lo cual implica que:
$\frac{\alpha \mu_1 p - \mu_1 \alpha}{\beta} + 1 > \frac{(1-\mu_1\alpha-\mu_2)p + \mu_1 \alpha}{(1-\beta)} - \frac{\beta}{(1-\beta)}$
Además sabemos que en esta tercera especificación $1 > \mu_1, \mu_2 > 0$, y que $1 = \mu_1 + \mu_2$. Reemplazando esta última igualdad en la expresión anterior y haciendo acomodando términos tenemos:

$\frac{\alpha\mu_1(p-1)}{\beta} + \frac{1-\mu_1\alpha}{(1-\beta)} > \frac{\mu_1(1-\alpha)p}{(1-\beta)}$

Normalizando el precios de los servicios adicionales e igualando a 1, nos queda la siguiente desigualdad:
$\frac{1-\mu_1\alpha}{(1-\beta)} > \frac{\mu_1(1-\alpha)}{(1-\beta)}$

Simplificando tenemos:
$1 > \mu_1$
El cual no contradice los supuestos de resolución de nuestro problema quedado demostrado que $h_1 > h_2$, y por tanto que se cumple la restricciónde compatibilidad de incentivos del tipo bajo.