

APRENDIZAJE ADAPTATIVO VIA
EXPECTATIVAS PARAMETRIZADAS Y LA
CURVA DE RENDIMIENTO
UN ENFOQUE NO-LINEAL

MARCO A. ORTIZ

DEPARTAMENTO DEL PROGRAMA MONETARIO
BANCO CENTRAL DE RESERVA DEL PERÚ

MARCO.ORTIZ@BCRP.GOB.PE

I. MOTIVACIÓN

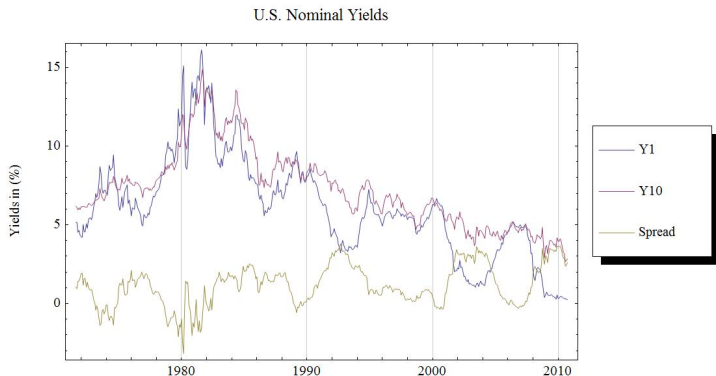
II. APRENDIZAJE RECURSIVO NO-LINEAL

III. APLICACIÓN AL MODELO BASE DSGE

IV. PASOS SIGUIENTES

La Prima de Riesgo por Bonos

Los retornos en exceso de los bonos de largo plazo son más altos (y mas variables) de lo que se puede explicar con un modelo DSGE estándar (Backus, Gregory y Zin, 1989).



¿Por qué es importante?

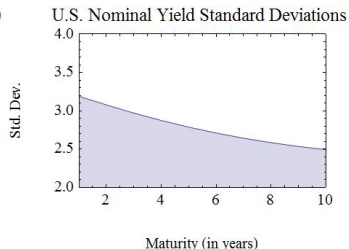
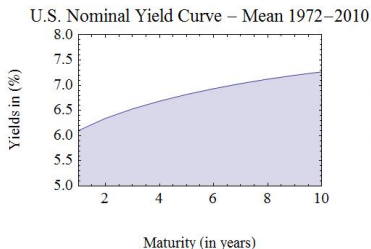
La pregunta es importante ya que:

- ▶ La incapacidad de los modelos DSGE para explicar la prima por riesgo y el comportamiento de los precios de los activos puede estar indicando fallas en la modelación.
- ▶ Los agentes y hacedores de política usan la curva de rendimiento para medir las expectativas de los agentes respecto a la política monetaria y la inflación.
- ▶ Las preguntas empíricas acerca de prima de maduración (*term premium*) requieren de un modelo DSGE estructural para proveer respuestas confiables (Rudebusch & Swanson, 2008). Ejemplo: Pro-ciclicidad vs. anti-ciclicidad de la prima de maduración - la respuesta depende del tipo de choque.

¿Cuál es el Objetivo?

Buscamos obtener reproducir algunos hechos estilizados de la curva de rendimiento con un modelo NK-DSGE. En particular, siguiendo a Den Haan (1995):

- ▶ En promedio, la curva de rendimiento muestra una pendiente positiva: La tasa de rendimiento se incrementa con el periodo de maduración del bono.
- ▶ La desviación estándar de las tasas de interés nominales y (ex-ante) reales son casi invariantes a la maduración del bono.



Algunos estudios previos

La literatura en modelos de precios de activos es vasta. Sólo por mencionar algunos estudios:

- ▶ Piazzesi y Schneider (2007): Modelo de equilibrio parcial. Los autores asumen un proceso de inflación y consumo en un modelo con agentes que exhiben preferencias recursivas (a la Epstein y Zin (1989)). Los agentes aprenden sobre los parámetros que gobiernan los efectos de los choques corrientes en la inflación y crecimiento del consumo futuros.

Algunos estudios previos

La literatura en modelos de precios de activos es vasta. Sólo por mencionar algunos estudios:

- ▶ Piazzesi y Schneider (2007): Modelo de equilibrio parcial. Los autores asumen un proceso de inflación y consumo en un modelo con agentes que exhiben preferencias recursivas (a la Epstein y Zin (1989)). Los agentes aprenden sobre los parámetros que gobiernan los efectos de los choques corrientes en la inflación y crecimiento del consumo futuros.
- ▶ Watcher (2006): Introduce una especificación de hábitos cambiantes en el tiempo de manera *ad hoc*. El consumo es modelado como un *random walk* y no hay un rol de política monetaria a pesar de las sugerencias halladas en modelos de forma reducida (Chernov y Mueller, 2008).

Algunos estudios previos

La literatura en modelos de precios de activos es vasta. Sólo por mencionar algunos estudios:

- ▶ Piazzesi y Schneider (2007): Modelo de equilibrio parcial. Los autores asumen un proceso de inflación y consumo en un modelo con agentes que exhiben preferencias recursivas (a la Epstein y Zin (1989)). Los agentes aprenden sobre los parámetros que gobiernan los efectos de los choques corrientes en la inflación y crecimiento del consumo futuros.
- ▶ Watcher (2006): Introduce una especificación de hábitos cambiantes en el tiempo de manera *ad hoc*. El consumo es modelado como un *random walk* y no hay un rol de política monetaria a pesar de las sugerencias halladas en modelos de forma reducida (Chernov y Mueller, 2008).
- ▶ Rudebusch y Swanson (2008b) - Usan preferencias EZ en un modelo DSGE. Resuelven el modelo con métodos de perturbación utilizando una aproximación de tercer orden alrededor del estado estacionario. Los resultados son insatisfactorios en dos criterios: Baja prima por riesgo y baja volatilidad de las tasas de largo plazo. Los autores logran mejorar sus resultados a través de un tipo de aprendizaje vinculado al cambio de la meta de inflación de largo plazo.

Algunos estudios previos

La literatura en modelos de precios de activos es vasta. Sólo por mencionar algunos estudios:

- ▶ Piazzesi y Schneider (2007): Modelo de equilibrio parcial. Los autores asumen un proceso de inflación y consumo en un modelo con agentes que exhiben preferencias recursivas (a la Epstein y Zin (1989)). Los agentes aprenden sobre los parámetros que gobiernan los efectos de los choques corrientes en la inflación y crecimiento del consumo futuros.
- ▶ Watcher (2006): Introduce una especificación de hábitos cambiantes en el tiempo de manera *ad hoc*. El consumo es modelado como un *random walk* y no hay un rol de política monetaria a pesar de las sugerencias halladas en modelos de forma reducida (Chernov y Mueller, 2008).
- ▶ Rudebusch y Swanson (2008b) - Usan preferencias EZ en un modelo DSGE. Resuelven el modelo con métodos de perturbación utilizando una aproximación de tercer orden alrededor del estado estacionario. Los resultados son insatisfactorios en dos criterios: Baja prima por riesgo y baja volatilidad de las tasas de largo plazo. Los autores logran mejorar sus resultados a través de un tipo de aprendizaje vinculado al cambio de la meta de inflación de largo plazo.
- ▶ Sinha(2010) - Extiende el modelo de Preston (2005) sobre aprendizaje cuando 'el largo plazo importa'. Usa un modelo NK-DSGE y presenta resultados interesantes respecto a los efectos del aprendizaje en la curva de rendimiento. En particular logra dar una explicación al puzle de predictibilidad encontrado por Campbell y Shiller, sin embargo no logra obtener suficiente volatilidad en las tasas de rendimiento de largo plazo. A su vez, debido a la linearización utilizada para resolver el modelo, la curva de rendimientos es plana.

Aprendizaje Recursivo No-Lineal

- ▶ Dada la importancia de la no-linealidad en un modelo que intenta explicar la dinámica de la curva de rendimiento, proponemos un modelo en el cual los agentes aprenden a través de mínimos cuadrados no-lineales.
- ▶ Los agentes forman expectativas condicionales sobre los valores futuros de las variables, lo cual implica dos tipos de aprendizaje: (1) aprendizaje sobre el modelo y (2) aprendizaje de los parámetros del modelo en tiempo real.
- ▶ La idea de usar Mínimos Cuadrados no Lineales (MCNL) es cercana a la idea de expectativas parametrizadas (PEA, por sus siglas en inglés) desarrolladas por Wright y Williams (1982, 1984), Miranda y Helmberger (1988), Marcet (1988) y Marcet y Den Haan (1990).
- ▶ Marcet y Marshall (1994) explican como la PEA puede ser entendida como agentes que usan un estimador de mínimos cuadrados para formar expectativas respecto al futuro.

Un Ejemplo Simple

Mostramos ahora el mecanismo en un modelo sencillo. Asumamos:

$$y_t = E_t y_{t+1}^\alpha z_t^\theta \quad (1)$$

$$z_t = \bar{z} + \rho z_{t-1} + e_t \quad (2)$$

Donde e_t es i.i.d. Asumimos que z_t es observable por los agentes cuando las expectativas son formadas.

El Enfoque de Expectativas Parametrizadas

1. Establecemos primero valores iniciales para el set de parámetros β y generamos series iniciales para z_t acorde con la distribución asumida. Con z_t podemos generar los valores predeterminados para el primer periodo. Así formamos el set de variables de estado 'suficientes' x_t que engloban la información disponible en el periodo $t \dots$
2. Al desconocer la forma funcional del termino $E_t y_{t+1}^\alpha$ seguimos una aproximación polinomial,

$$e^{\beta_0 + \beta_1 \log z_t + \beta_2 (\log z_t)^2} = e^{\beta' x_t} \quad (3)$$

donde $\beta = [\beta_0 \beta_1 \beta_2]'$ y $x_t = [1 \log z_t (\log z_t)^2]'$.

3. Utilizamos:

$$y_t \simeq e^{\beta' x_t} z_t^\theta \quad (4)$$

para generar la serie de completa de valores de las variables endógenas $\{y_t\}_1^T$.

4. Con los valores de y_t podemos computar los valores de Expectativas Racionales (ER) acordes al modelo:

$$y_t^{RE} = y_{t+1}^\alpha z_t^\theta. \quad (5)$$

El Enfoque de Expectativas Parametrizadas (cont.)

5. Ahora buscamos un 'punto fijo', así que actualizamos el valor de los parámetros β en busca de:

$$\beta = \operatorname{argmin} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \| (y_{t+1}^{RE})^\alpha - e^{\beta' x_t} \|^2 \quad (6)$$

así que regresionamos $\log\{(y_{t+1}^{RE})^\alpha\}_1^T$ sobre $x_t = [1 \ z_t \ z_t^2]'$ y así encontramos nuevos valores de β

6. Repetimos los pasos 3-5 hasta que el criterio de convergencia es cumplido.
- ▶ Podemos entonces entender la PEA como una forma en que los agentes aprenden a la forma de la economía .
 - ▶ Berardi and Duffy (2010) proveen un procedimiento práctico para Aprendizaje Adaptativo en Tiempo Real a través de Expectativas Parametrizadas.

Expectativas Parametrizadas en Tiempo Real

Ahora contrastamos el Aprendizaje Adaptativo en Tiempo Real con PEA.

1. Tomamos los valores iniciales para el set de parámetros y generamos series para los choques z_t .
2. Computamos las expectativas en:

$$E_t y_{t+1}^\alpha \simeq e^{\beta_0 + \beta_1 \log z_t + \beta_2 (\log z_t)^2} \quad (7)$$

3. Ahora insertamos la fórmula para las expectativas en el modelo, obteniendo la Ley de Movimiento Actual (ALM, por siglas en inglés):

$$y_t = e^{\beta_0 + \beta_1 \log z_t + \beta_2 (\log z_t)^2} z_t^\theta = e^{\beta' x_t} z_t^\theta \quad (8)$$

lo que implica una ALM no-lineal:

$$y_t^\alpha = e^{\alpha \beta' x_t} z_t^{\alpha \theta} \quad (9)$$

Expectativas Parametrizadas en Tiempo Real (cont.)

4. Nótese que del paso 2 tenemos:

$$E_{t-1}y_t^\alpha = e^{\beta'x_{t-1}} \quad (10)$$

lo que genera un error de predicción de un periodo, el cual usaremos para actualizar los 'beliefs' de los agentes a través de Mínimos Cuadrados Recursivos.

$$\beta_t = \beta_{t-1} + t^{-1}R_{t-1}^{-1}x_{t-1}(\log(y_t^\alpha) - \log(E_{t-1}y_t^\alpha)) \quad (11)$$

$$R_t = R_{t-1} + t^{-1}(x_t x_t' - R_{t-1}) \quad (12)$$

donde R representa la matriz de pesos relativos.

5. Repetimos los pasos 2-4 hasta cumplir el criterio de convergencia.

- ▶ En efecto, los agentes actualizan sus 'beliefs' en cada punto del tiempo, aprendiendo simultáneamente la forma del modelo, así como el valor de los parámetros.
- ▶ Los agentes aprenderán la solución aproximada en el equilibrio, las condiciones de convergencia del algoritmo son descritas por Marcet y Marshall (1994). La prueba de estabilidad es local, por lo que no podemos comenzar las simulaciones muy lejos del equilibrio.

Procedimiento en Simulaciones

El procedimiento es el siguiente:

1. Resolvemos el modelo a través de técnicas de perturbación.
2. Producimos una serie de choques.
3. Replicamos la trayectoria de las series y formamos las expectativas condicionales.
4. Regresionamos la serie sobre el polinomio base de la aproximación.
5. Obtenemos los parámetros de inicio para el método de expectativas parametrizadas.
6. Resolvemos el modelo por PEA (Non-linear fit).
7. Tomamos los valores de convergencia de los parámetros.
8. Fijamos un 'initial gain' - proxy de la confianza de los agentes en el modelo (.98)
9. Perturbamos los parámetros de equilibrio en 10%.
10. Resolvemos por MCNL recursivos.
11. Reportamos promedios de momentos de cada simulación en la convergencia hacia el equilibrio.

Resultados Modelo de Crecimiento Estocástico

- ▶ Realizamos dos ejercicios, en el primero (ya descrito) perturbamos todos los parámetros del modelo en $\pm 10\%$, los resultados muestran que la volatilidad depende del signo de la desviación de los parámetros.
- ▶ En el segundo ejercicio fijamos un parámetro de ganancia constante (*constant gain learning*), usando los *priors* de expectativas racionales.
- ▶ En ambos ejercicios el grado de confianza en los *priors* es de 98%.

Table 1: Stochastic Growth Model (conf. 98%)

Variable	RE	- 10%	+ 10%	CG, RE priors
$sd[k]$	1	1.13	0.99	1.05
<i>convergence</i>	-	4090	1323	-

Modelo DSGE Base - Setup

Seguimos a Rudebusch and Swanson (2008a, 2008b):

- ▶ **Hogares** El hogar representativo busca maximizar su utilidad sobre el consumo y el trabajo:

$$\max E_t \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \left(\frac{c_t^{1-\gamma}}{1-\gamma} - \chi_0 \frac{l_t^{1+\chi}}{1+\chi} \right) \quad (13)$$

El factor estocástico de descuento bajo esta especificación esta definido como:

$$m_{t,t+j} \equiv \beta^j \frac{(c_{t+j})^{-\gamma}}{(c_t)^{-\gamma}} \frac{P_t}{P_{t+j}} \quad (14)$$

- ▶ **Firmas** Calvo pricing: competencia monopolística en bienes intermedios, las firmas están indexadas por f . Tecnología Cobb-Douglas con capital específico a la empresa fijo:

$$y_t(f) = A_t \bar{k}^\alpha l_t(f)^{1-\alpha}, \quad (15)$$

donde A_t denota los choques agregados de tecnología:

$$\log A_t = \rho_A \log A_{t-1} + \varepsilon_t^A, \quad (16)$$

firmas maximizan ganancias eligiendo el precio óptimo cuando el contrato expira.

Setup (2)

- ▶ **Gobierno** No hay lado fiscal. La autoridad monetaria fija la tasa de interés nominal de corto plazo siguiendo una regla de Taylor.

$$e^{it} = \bar{i} \left(\frac{\pi_t}{\pi} \right)^{\delta_\pi} \left(\frac{x_t}{x} \right)^{\delta_x} \left(\frac{v_t}{v} \right) \quad (17)$$

- ▶ **Bonos de Largo Plazo** Los agentes pueden comprar y vender bonos perpetuos libres de riesgo de repago con cupones que declinan a una tasa geométrica. El precio del bono $\tilde{p}_t^{(n)}$ satisface:

$$\tilde{p}_t^{(n)} = 1 + \delta_c E_t[m_{t+1} \tilde{p}_{t+1}^{(n)}] \quad (18)$$

donde δ_c representa la tasa de reducción en el valor del cupón. Calculamos la prima computando el precio del bono bajo preferencias neutrales al riesgo (descontando el bono a la tasa libre de riesgo):

$$\hat{p}_t^{(n)} = 1 + \delta_c e^{-it} E_t \hat{p}_{t+1}^{(n)}, \quad (19)$$

así la prima por maduración está dada por:

$$\psi_t^{(n)} \equiv \log \left(\frac{\delta_c \tilde{p}_t^{(n)}}{\tilde{p}_t^{(n)} - 1} \right) - \log \left(\frac{\delta_c \hat{p}_t^{(n)}}{\hat{p}_t^{(n)} - 1} \right) \quad (20)$$

Resumen del Modelo

El modelo está escrito de manera recursiva. Nos fijamos en las ecuaciones "forward looking":

- ▶ Ecuación de Euler:

$$U'_1(c_t, l_t) = \beta E_t \left(U'_1(c_{t+1}, l_{t+1}) e^{it} \frac{1}{\pi_{t+1}} \right) \quad (21)$$

- ▶ Ecuaciones de precios de las firmas (usamos variables auxiliares):

$$z n_t = (1 + \theta) \varphi_t U'_1(c_t, l_t) y_t + \xi \beta E_t \left(\pi_{t+1}^{\frac{1+\theta}{\theta \eta}} z n_{t+1} \right) \quad (22)$$

$$z d_t = y_t U'_1(c_t, l_t) + \xi \beta E_t \left(\pi_{t+1}^{\frac{1}{\theta}} z d_{t+1} \right) \quad (23)$$

- ▶ Ecuaciones de precios de los bonos:

$$\tilde{p}_t^{(n)} = 1 + \delta_c E_t \left(\frac{U'_1(c_{t+1}, l_{t+1})}{U'_1(c_t, l_t)} \frac{1}{\pi_{t+1}} \tilde{p}_{t+1}^{(n)} \right) \quad (24)$$

$$\hat{p}_t^{(n)} = 1 + \delta_c e^{-it} E_t \hat{p}_{t+1}^{(n)}, \quad (25)$$

Aprendizaje en Tiempo Real

- ▶ Nótese que hasta el momento no hemos especificado el tipo de racionalidad limitada seguido por los agentes.
- ▶ Nuestro enfoque de ahora en adelante es trabajar con especificaciones distintas:
 1. Caso 1: Los agentes saben como establecer expectativas respecto a la economía, pero ignoran las financieras;
 2. Caso 2: Los agentes saben como descontar los precios de los activos pero ignoran como formar expectativas sobre la economía real.
 3. Caso 3: Agentes estiman todas las expectativas condicionales;
- ▶ De momento no somos rigurosos con la crítica de Preston(2005).

Resolviendo el Modelo

Resolvemos para el Caso 3 - reemplazamos las primeras tres expectativas condicionales por una forma funcional flexible (*tensor product base*, hasta el tercer grado). Por ejemplo, la ecuación de Euler:

$$U'_1(c_t, l_t) = \beta \phi_1 \left(X_t, \hat{\beta}_1 \right) \quad (26)$$

- ▶ Los parámetros a calibrar están dados por Rudebusch y Swanson (2008a). Los mantenemos constantes a través de los ejercicios.
- ▶ En la parametrización implícitamente asumimos que los agentes parametrizan primero el consumo y usan esa serie para calcular el valor de los activos financieros.
- ▶ El orden de la parametrización no es trivial (Judd, Maliar & Maliar, 2009).

Resultados - Escenario Base

- ▶ Obtenemos un incremento significativo en la volatilidad de las variables financieras al incorporar aprendizaje.
- ▶ Logramos además una disminución relativa en el ratio de volatilidades entre las tasas de corto y largo plazo.
- ▶ La pendiente de la curva de rendimientos es aun negativa.

Table 3: Power Utility Model - Results

Variable	Rational Exp.	Constant Gain
$sd[C]$	2.03	2.15
$sd[L]$	1.11	1.14
$sd[w]$	0.28	0.31
$sd[\pi]$	2.50	2.62
$sd[i]$	0.10	0.12
$sd[i^{(40)}]$	0.05	0.08
$mean[\kappa^{(40)}]$	0.012	0.012
$sd[\kappa^{(40)}]$	0.03	0.06
$mean[i^{(40)} - i]$	-0.020	-0.019

Resultados - Hábitos de Consumo

- ▶ Incorporamos una variable de estado adicional C_{t-1} .
- ▶ Logramos una mejora en niveles en términos de la prima por riesgo, manteniendo los resultados del modelo inicial.
- ▶ La pendiente de la curva de rendimientos es todavía negativa.

Table 4: Specification under Consumption Habits

Variable	Rational Exp.	Constant Gain
$sd[C]$	1.91	2.15
$sd[L]$	1.14	1.14
$sd[w]$	0.25	0.31
$sd[\pi]$	2.45	2.62
$sd[i]$	0.09	0.11
$sd[i^{(40)}]$	0.06	0.11
$mean[\kappa^{(40)}]$	0.012	0.012
$sd[\kappa^{(40)}]$	0.03	0.07
$mean[i^{(40)} - i]$	-0.020	-0.019

Pasos Siguietes...

- ▶ Los resultados preliminares muestran que el mecanismo puede ayudar - realizar ejercicios de robustez cambiando la secuencia en la parametrización.

Pasos Siguintes...

- ▶ Los resultados preliminares muestran que el mecanismo puede ayudar - realizar ejercicios de robustez cambiando la secuencia en la parametrización.
- ▶ En línea con R&S (2008a,2008b), el siguiente paso es incorporar preferencias recursivas - que otorgan un buen *fit* para niveles.

Pasos Siguintes...

- ▶ Los resultados preliminares muestran que el mecanismo puede ayudar - realizar ejercicios de robustez cambiando la secuencia en la parametrización.
- ▶ En línea con R&S (2008a,2008b), el siguiente paso es incorporar preferencias recursivas - que otorgan un buen *fit* para niveles.
- ▶ Sin embargo, a medida que el número de variables de estado se incrementa, corremos el riesgo de multi-colinearidad - problemas de convergencia

Pasos Siguintes...

- ▶ Los resultados preliminares muestran que el mecanismo puede ayudar - realizar ejercicios de robustez cambiando la secuencia en la parametrización.
- ▶ En línea con R&S (2008a,2008b), el siguiente paso es incorporar preferencias recursivas - que otorgan un buen *fit* para niveles.
- ▶ Sin embargo, a medida que el número de variables de estado se incrementa, corremos el riesgo de multi-colinearidad - problemas de convergencia
- ▶ Referente al aprendizaje, el 'oversampling' endógeno de PEA ayuda a la eficiencia del método, pero aun se pueden aplicar mejoras (Judd, Maliar y Maliar, 2011).

Pasos Siguintes...

- ▶ Los resultados preliminares muestran que el mecanismo puede ayudar - realizar ejercicios de robustez cambiando la secuencia en la parametrización.
- ▶ En línea con R&S (2008a,2008b), el siguiente paso es incorporar preferencias recursivas - que otorgan un buen *fit* para niveles.
- ▶ Sin embargo, a medida que el número de variables de estado se incrementa, corremos el riesgo de multi-colinearidad - problemas de convergencia
- ▶ Referente al aprendizaje, el 'oversampling' endógeno de PEA ayuda a la eficiencia del método, pero aun se pueden aplicar mejoras (Judd, Maliar y Maliar, 2011).
- ▶ Mucho más que hacer con el modelo, se trata de replicar las restricciones que los agentes enfrentan en la realidad -(elección de estados, mala especificación, etc.)

Pasos Siguientes...

- ▶ Los resultados preliminares muestran que el mecanismo puede ayudar - realizar ejercicios de robustez cambiando la secuencia en la parametrización.
- ▶ En línea con R&S (2008a,2008b), el siguiente paso es incorporar preferencias recursivas - que otorgan un buen *fit* para niveles.
- ▶ Sin embargo, a medida que el número de variables de estado se incrementa, corremos el riesgo de multi-colinealidad - problemas de convergencia
- ▶ Referente al aprendizaje, el 'oversampling' endógeno de PEA ayuda a la eficiencia del método, pero aun se pueden aplicar mejoras (Judd, Maliar y Maliar, 2011).
- ▶ Mucho más que hacer con el modelo, se trata de replicar las restricciones que los agentes enfrentan en la realidad -(elección de estados, mala especificación, etc.)
- ▶ Hacer explícito el uso del modelo para dinámicas transicionales (Nunes, 2009).

APRENDIZAJE ADAPTATIVO VIA
EXPECTATIVAS PARAMETRIZADAS Y LA
CURVA DE RENDIMIENTO
UN ENFOQUE NO-LINEAL

MARCO A. ORTIZ

DEPARTAMENTO DEL PROGRAMA MONETARIO
BANCO CENTRAL DE RESERVA DEL PERÚ

MARCO.ORTIZ@BCRP.GOB.PE