Equivalencia entre Comisiones por Flujo y Saldo en Sistemas de Pensiones con Cuentas Individuales

Luis Chávez Bedoya, PhD

lchavezbedoya@esan.edu.pe

XXXI Encuentro de Economistas del BCRP

Lima, Octubre 28 de 2013

Motivación

Motivación

Motivación

- Decisión difícil e importante

Motivación

- Decisión difícil e importante
- Número de afiliados involucrados

Motivación

- Decisión difícil e importante
- Número de afiliados involucrados
- Desinformación a todo nivel

Decisión compleja

Necesidad de un modelo matemático

Necesidad de un modelo matemático

- ¿Cómo se hacen comparables los dos esquemas de comisión?

Decisión compleja

Necesidad de un modelo matemático

- ¿Cómo se hacen comparables los dos esquemas de comisión?
- ¿Qué variables entran en juego?

Decisión compleja

Necesidad de un modelo matemático

- ¿Cómo se hacen comparables los dos esquemas de comisión?
- ¿Qué variables entran en juego?
- ¿Cómo afectan el riesgo y la densidad de cotización a la decisión?

Modelo matemático

Problema del afiliado

Activos disponibles

Activos disponibles

Asumimos que las contribuciones del afiliado pueden invertirse en dos activos que satisfacen:

Activos disponibles

Asumimos que las contribuciones del afiliado pueden invertirse en dos activos que satisfacen:

$$dP_0(t) = rP_0(t)dt, \qquad P_0(0) = P_0 > 0$$

$$dP_1(t) = \mu P_1(t)dt + \sigma P_1(t)dB(t), \qquad P_1(0) = P_1 > 0$$

Activos disponibles

Asumimos que las contribuciones del afiliado pueden invertirse en dos activos que satisfacen:

$$dP_0(t) = rP_0(t)dt, \qquad P_0(0) = P_0 > 0$$

$$dP_1(t) = \mu P_1(t)dt + \sigma P_1(t)dB(t), \qquad P_1(0) = P_1 > 0$$

Problema del afiliado

- Un afiliado tiene T meses antes de jubilarse

Problema del afiliado

- Un afiliado tiene T meses antes de jubilarse
- Tiene una cantidad inicial $W_0 \geq 0$ para invertir en su CIC

Problema del afiliado

- Un afiliado tiene T meses antes de jubilarse
- Tiene una cantidad inicial $W_0 \geq 0$ para invertir en su CIC
- Después del depósito inicial contribuye a una tasa constante $\theta > 0$ por mes

Problema del afiliado

- Un afiliado tiene T meses antes de jubilarse
- Tiene una cantidad inicial $W_0 \geq 0$ para invertir en su CIC
- Después del depósito inicial contribuye a una tasa constante $\theta > 0$ por mes
- En cada $t \in [0, T]$ determina $x(t)$, la proporción de la CIC que se invierte en el activo riesgoso

Problema del afiliado

- Un afiliado tiene T meses antes de jubilarse
- Tiene una cantidad inicial $W_0 \geq 0$ para invertir en su CIC
- Después del depósito inicial contribuye a una tasa constante $\theta > 0$ por mes
- En cada $t \in [0, T]$ determina $x(t)$, la proporción de la CIC que se invierte en el activo riesgoso
- Se denomina $W(t)$ a la riqueza del afiliado

Problema del afiliado

- Un afiliado tiene T meses antes de jubilarse
- Tiene una cantidad inicial $W_0 \geq 0$ para invertir en su CIC
- Después del depósito inicial contribuye a una tasa constante $\theta > 0$ por mes
- En cada $t \in [0, T]$ determina $x(t)$, la proporción de la CIC que se invierte en el activo riesgoso
- Se denomina $W(t)$ a la riqueza del afiliado

Con lo cual:

$$dW(t) = [W(t)[x(t)\mu + (1 - x(t))r] + \theta]dt + W(t)x(t)\sigma dB(t)$$

Problema del afiliado

Problema del afiliado

El afiliado desea maximizar su utilidad terminal encontrando el proceso $x^*(t)$ al resolver:

Problema del afiliado

El afiliado desea maximizar su utilidad terminal encontrando el proceso $x^*(t)$ al resolver:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \mathbb{E}[U(W(T))] \\
\text{st.} \quad & x(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}), \\
& dW(t) = [W(t)[x(t)(\mu - r) + r] + \theta]dt + W(t)x(t)\sigma dB(t), \\
& W(0) = W_0
\end{aligned}
$$

Problema del afiliado

Problema del afiliado

Si consideramos que el inversionista posee una función de utilidad exponencial

$$U(W) = -\frac{1}{c}e^{-cW}, \quad c > 0$$

Problema del afiliado

Si consideramos que el inversionista posee una función de utilidad exponencial

$$U(W) = -\frac{1}{c}e^{-cW}, \quad c > 0$$

y aplicamos la estrategia óptima $x^*(t)$, entonces

$$W(T) = \overline{W}(T)$$

Problema del afiliado

Problema del afiliado

La máxima utilidad de riqueza terminal sería

La máxima utilidad de riqueza terminal sería

$$\mathbb{E}[U(\overline{W}(T))] = \\ -\frac{1}{c}\exp\left\{-c\left(\frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2 c}T + e^{rT}W_0 + \theta\left(\frac{e^{rT}-1}{r}\right)\right)\right\}$$

Problema del afiliado

La máxima utilidad de riqueza terminal sería

$$\mathbb{E}[U(\overline{W}(T))] = \\ -\frac{1}{c}\exp\left\{-c\left(\frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2 c}T + e^{rT}W_0 + \theta\left(\frac{e^{rT}-1}{r}\right)\right)\right\}$$

El correspondiente equivalente de certeza de $\overline{W}(T)$ sería

La máxima utilidad de riqueza terminal sería

$$\mathbb{E}[U(\overline{W}(T))] = -\frac{1}{c}\exp\left\{-c\left(\frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2 c}T + e^{rT}W_0 + \theta\left(\frac{e^{rT}-1}{r}\right)\right)\right\}$$

El correspondiente equivalente de certeza de $\overline{W}(T)$ sería

$$\mathrm{CE}(\overline{W}(T)) = \frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2 c}T + e^{rT}W_0 + \theta\left(\frac{e^{rT}-1}{r}\right)$$

Comisiones por saldo y flujo

Comisión por saldo

Comisión por saldo

Sea $\delta > 0$ el cobro mensual por saldo expresado en tiempo continuo

Comisión por saldo

Sea $\delta > 0$ el cobro mensual por saldo expresado en tiempo continuo

Sea $W_s(t)$ la riqueza en la CIC del afiliado bajo esta comisión, entonces ésta satisface la siguiente EDE

Comisión por saldo

Sea $\delta > 0$ el cobro mensual por saldo expresado en tiempo continuo

Sea $W_s(t)$ la riqueza en la CIC del afiliado bajo esta comisión, entonces ésta satisface la siguiente EDE

$$dW_s(t) = [W_s(t)[x_s(t)(\mu - r) + r - \delta] + \theta]dt + W_s(t)x_s(t)\sigma dB(t)$$

Comisión por saldo

El afiliado desea maximizar su utilidad terminal encontrando el proceso $x_s^*(t)$ al resolver:

El afiliado desea maximizar su utilidad terminal encontrando el proceso $x_s^*(t)$ al resolver:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \mathbb{E}[U(W_s(T))] \\
\text{st.} \quad & x_s(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}), \\
& dW_s(t) = [W_s(t)[x_s(t)(\mu - r) + r - \delta] + \theta]dt \\
& \qquad\qquad + W_s(t)x_s(t)\sigma dB(t), \\
& W_s(0) = W_0
\end{aligned}
$$

Comisión por saldo

Comisión por saldo

Bajo los mismos supuestos que los utiliados en ausencia de comisiones, el máximo equivalente de certeza bajo comisión por saldo sería

Comisión por saldo

Bajo los mismos supuestos que los utiliados en ausencia de comisiones, el máximo equivalente de certeza bajo comisión por saldo sería

$$\mathrm{CE}(\overline{W}_s(T)) = \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2 c}T + e^{(r-\delta)T}W_0 + \theta\left(\frac{e^{(r-\delta)T} - 1}{r - \delta}\right)$$

Comisión por flujo

Comisión por flujo

Sea $\alpha > 0$ el cargo por flujo sobre el aporte

Comisión por flujo

Sea $\alpha > 0$ el cargo por flujo sobre el aporte

La comisión que pagaría el afiliado sobre un aporte X sería:

$$F = X(1 - e^{-\alpha})$$

Comisión por flujo

Sea $\alpha > 0$ el cargo por flujo sobre el aporte

La comisión que pagaría el afiliado sobre un aporte X sería:

$$F = X(1 - e^{-\alpha})$$

La comisión F pudo ser invertida en el fondo, por lo que el aporte "ajustado" por el costo de oportunidad es:

$$e^{-\alpha}X$$

Comisión por flujo

Sea $\alpha > 0$ el cargo por flujo sobre el aporte

Comisión por flujo

Sea $\alpha > 0$ el cargo por flujo sobre el aporte

Sea $W_f(t)$ la riqueza "ajustada" en la CIC del afiliado bajo esta comisión, entonces ésta satisface la siguiente EDE

Comisión por flujo

Sea $\alpha > 0$ el cargo por flujo sobre el aporte

Sea $W_f(t)$ la riqueza "ajustada" en la CIC del afiliado bajo esta comisión, entonces ésta satisface la siguiente EDE

$$dW_f(t) = [W_f(t)[x_f(t)(\mu - r) + r] + e^{-\alpha}\theta]dt + W_f(t)x_f(t)\sigma dB(t)$$

Comisión por flujo

Comisión por flujo

El afiliado desea maximizar su utilidad terminal encontrando el proceso $x_f^*(t)$ al resolver:

Comisión por flujo

El afiliado desea maximizar su utilidad terminal encontrando el proceso $x_f^*(t)$ al resolver:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \mathbb{E}[U(W_f(T))] \\
\text{st.} \quad & x_f(t) \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T; \mathbb{R}), \\
& dW_f(t) = [W_f(t)[x_f(t)(\mu - r) + r] + e^{-\alpha}\theta]dt \\
& \qquad\qquad + W_f(t)x_f(t)\sigma dB(t), \\
& W_s(0) = e^{-\alpha} W_0
\end{aligned}$$

Comisión por flujo

Comisión por flujo

Bajo los mismos supuestos que los utiliados en ausencia de comisiones, el máximo equivalente de certeza bajo comisión por flujo sería

Comisión por flujo

Bajo los mismos supuestos que los utiliados en ausencia de comisiones, el máximo equivalente de certeza bajo comisión por flujo sería

$$\mathrm{CE}(\overline{W}_f(T)) = \frac{1}{2}\frac{(\mu - r)^2}{\sigma^2 c}T + e^{-\alpha}\left[e^{rT}W_0 + \theta\left(\frac{e^{rT}-1}{r}\right)\right]$$

Comparación de comisiones

Comparando equivalentes de certeza

Comparando equivalentes de certeza

El afiliado necesita comparar $\text{CE}(\overline{W}_s(T))$ y $\text{CE}(\overline{W}_f(T))$, entonces define el siguiente ratio

$$\text{R}_{sf} = \frac{\text{CE}(\overline{W}_s(T))}{\text{CE}(\overline{W}_f(T))}$$

Comparando equivalentes de certeza

El afiliado necesita comparar $\mathrm{CE}(\overline{W}_s(T))$ y $\mathrm{CE}(\overline{W}_f(T))$, entonces define el siguiente ratio

$$\mathrm{R}_{sf} = \frac{\mathrm{CE}(\overline{W}_s(T))}{\mathrm{CE}(\overline{W}_f(T))}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{sf} > 1 &\quad \longrightarrow \quad \text{comisión por saldo es más conveniente} \\
\mathrm{R}_{sf} < 1 &\quad \longrightarrow \quad \text{comisión por flujo es más conveniente} \\
\mathrm{R}_{sf} = 1 &\quad \longrightarrow \quad \text{comisiones son indistintas}
\end{aligned}$$

Comparando equivalentes de certeza

Comparando equivalentes de certeza

Además de los supuestos previos asumimos $W_0 = 0$

Comparando equivalentes de certeza

Además de los supuestos previos asumimos $W_0 = 0$

Manteniendo las variables fijas, podemos expresar el ratio R_{sf} como una función de δ

Comparando equivalentes de certeza

Además de los supuestos previos asumimos $W_0 = 0$

Manteniendo las variables fijas, podemos expresar el ratio R_{sf} como una función de δ

$$\mathrm{R}_{sf}(\delta) = \frac{\frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2 c}T + \theta\left(\frac{e^{(r-\delta)T}-1}{r-\delta}\right)}{\frac{1}{2}\frac{(\mu-r)^2}{\sigma^2 c}T + e^{-\alpha}\theta\left(\frac{e^{rT}-1}{r}\right)}$$

Comisión por saldo equivalente

Comisión por saldo equivalente

Sea δ^* la comisión por saldo equivalente, es decir, el valor δ^* tal que $\mathrm{R}_{sf}(\delta^*) = 1$

Sea δ^* la comisión por saldo equivalente, es decir, el valor δ^* tal que $\mathrm{R}_{sf}(\delta^*) = 1$

Entonces:

$$\frac{e^{(r-\delta^*)T} - 1}{r - \delta^*} = e^{-\alpha}\left(\frac{e^{rT} - 1}{r}\right)$$

Comisión por saldo equivalente

Sea δ^* la comisión por saldo equivalente, es decir, el valor δ^* tal que $\mathrm{R}_{sf}(\delta^*) = 1$

Entonces:

$$\frac{e^{(r-\delta^*)T} - 1}{r - \delta^*} = e^{-\alpha} \left(\frac{e^{rT} - 1}{r} \right)$$

Notar que si r o T se incrementan entonces δ^* se reduce (benefician a la comisión por flujo)

Comisión por saldo equivalente

Asimismo:

$$\alpha = \ln\left(\bar{s}_{\overline{T}|r} / \bar{s}_{\overline{T}|(r-\delta^*)}\right)$$

Comisión por saldo equivalente

Asimismo:

$$\alpha = \ln\left(\bar{s}_{\overline{T}|r} / \bar{s}_{\overline{T}|(r-\delta^*)}\right)$$

donde $\bar{s}_{\overline{T}|(r-\delta^*)}$ y $\bar{s}_{\overline{T}|r}$ son los valores futuros de las respectivas anualidades en tiempo continuo

Notar que δ^* sería función sólo de α, T y r

Comisión por saldo equivalente

Asimismo:

$$\alpha = \ln\left(\bar{s}_{\overline{T}|r} / \bar{s}_{\overline{T}|(r-\delta^*)}\right)$$

donde $\bar{s}_{\overline{T}|(r-\delta^*)}$ y $\bar{s}_{\overline{T}|r}$ son los valores futuros de las respectivas anualidades en tiempo continuo

Notar que δ^* sería función sólo de α, T y r

Aplicación al SPP

Algunos parámetros

Algunos parámetros

Algunos parámetros

- Edad de jubilación 65 años

Algunos parámetros

- Edad de jubilación 65 años
- Consideramos 3 diferentes cargos por flujo (aplicados sobre el salario): $f_{\text{min}} = 1.47\%$, $f_{\text{max}} = 1.84\%$ and $f_{\text{avg}} = 1.615\%$

Algunos parámetros

- Edad de jubilación 65 años
- Consideramos 3 diferentes cargos por flujo (aplicados sobre el salario): $f_{\text{min}} = 1.47\%$, $f_{\text{max}} = 1.84\%$ and $f_{\text{avg}} = 1.615\%$
- Con lo cual: $\alpha_{\text{min}} = 0.1590$, $\alpha_{\text{max}} = 0.2033$ y $\alpha_{\text{avg}} = 0.1761$

Algunos parámetros

- Edad de jubilación 65 años
- Consideramos 3 diferentes cargos por flujo (aplicados sobre el salario): $f_{\text{min}} = 1.47\%$, $f_{\text{max}} = 1.84\%$ and $f_{\text{avg}} = 1.615\%$
- Con lo cual: $\alpha_{\text{min}} = 0.1590$, $\alpha_{\text{max}} = 0.2033$ y $\alpha_{\text{avg}} = 0.1761$
- Asumimos $r = 0$ y θ constante

Comisión por saldo equivalente (δ^*)

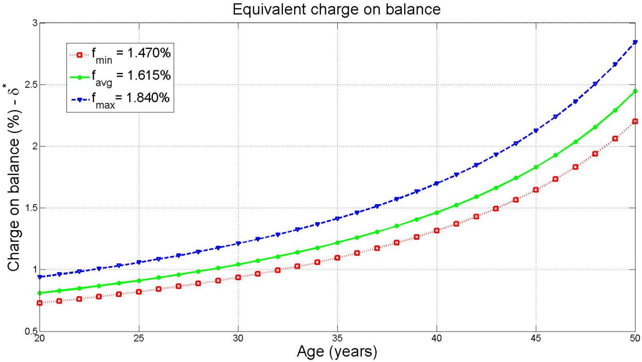

Figura: Comisión por saldo equivalente, δ^*, tal que $R^*_{sf} = 1$ para distintas edades y comisiones por flujo. Se ha considerado $r = 0$ y θ constante

Consideraciones finales

Mercado completo

Mercado completo

- Efecto de la compleción del mercado

Mercado completo

- Efecto de la compleción del mercado
- Básicamente valuar reclamos contingentes

Mercado completo

- Efecto de la compleción del mercado
- Básicamente valuar reclamos contingentes
- Irrelevancia de las preferencias individuales, activo riesgoso y estrategia de inversión

Mercado completo

- Efecto de la compleción del mercado
- Básicamente valuar reclamos contingentes
- Irrelevancia de las preferencias individuales, activo riesgoso y estrategia de inversión
- Efecto de la tasa libre de riesgo, horizonte de jubilación y estructura de aportes

Mercado incompleto: único fondo

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Las contribuciones serían equivalentes a “comprar” cuotas de este fondo y mantenerlas hasta T

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Las contribuciones serían equivalentes a "comprar" cuotas de este fondo y mantenerlas hasta T

Con lo cual, para la comisión por saldo:

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Las contribuciones serían equivalentes a "comprar" cuotas de este fondo y mantenerlas hasta T

Con lo cual, para la comisión por saldo:

$$W_s^i(t) \;=\; W_i e^{(\mu-\delta-\frac{\sigma^2}{2})(t-i)+\sigma(B(t)-B(i))}, \qquad i \leq t \leq T$$

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Las contribuciones serían equivalentes a "comprar" cuotas de este fondo y mantenerlas hasta T

Con lo cual, para la comisión por saldo:

$$\begin{aligned} W_s^i(t) &= W_i e^{(\mu-\delta-\frac{\sigma^2}{2})(t-i)+\sigma(B(t)-B(i))}, \qquad i \leq t \leq T \\ W_s(T) &= \sum_{i=0}^{T-1} W_s^i(T) \end{aligned}$$

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Las contribuciones serían equivalentes a "comprar" cuotas de este fondo y mantenerlas hasta T

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Las contribuciones serían equivalentes a "comprar" cuotas de este fondo y mantenerlas hasta T

Con lo cual para la comisión por flujo:

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Las contribuciones serían equivalentes a "comprar" cuotas de este fondo y mantenerlas hasta T

Con lo cual para la comisión por flujo:

$$W_f^i(t) \quad = \quad W_i e^{-\alpha} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-i)+\sigma(B(t)-B(i))}, \qquad i \leq t \leq T$$

Mercado incompleto: único fondo

Existe un único fondo con valor cuota

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \sigma V(t)dB(t), \quad V(0) = V_0$$

Las contribuciones serían equivalentes a "comprar" cuotas de este fondo y mantenerlas hasta T

Con lo cual para la comisión por flujo:

$$\begin{aligned} W_f^i(t) &= W_i e^{-\alpha} e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})(t-i) + \sigma(B(t) - B(i))}, \qquad i \leq t \leq T \\ W_f(T) &= \sum_{i=0}^{T-1} W_f^i(T) \end{aligned}$$

Descomposición de δ^* con único fondo

Descomposición de δ^* con único fondo

Bajo ciertas condiciones, se tiene

$$\delta^* = \delta^*_{\mathsf{N}} + \psi(b) + \phi(b, p)$$

Descomposición de δ^* con único fondo

Bajo ciertas condiciones, se tiene

$$\delta^* = \delta^*_{\mathrm{N}} + \psi(b) + \phi(b, p)$$

Donde:

Descomposición de δ^* con único fondo

Bajo ciertas condiciones, se tiene

$$\delta^* = \delta^*_{\mathrm{N}} + \psi(b) + \phi(b, p)$$

Donde:

- δ^* es tal que $\frac{\mathbb{E}[U(W_s(T))]}{\mathbb{E}[U(W_f(T))]} = 1$

Descomposición de δ^* con único fondo

Bajo ciertas condiciones, se tiene

$$\delta^* = \delta^*_{\mathrm{N}} + \psi(b) + \phi(b, p)$$

Donde:

- δ^* es tal que $\frac{\mathbb{E}[U(W_s(T))]}{\mathbb{E}[U(W_f(T))]} = 1$
- δ^*_{N} es tal que $\frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\mathbb{E}[W_f(T)]} = 1$, además $\frac{\partial \delta^*_{\mathrm{N}}}{\partial \mu} < 0$

Descomposición de δ^* con único fondo

Bajo ciertas condiciones, se tiene

$$\delta^* = \delta^*_{\mathrm{N}} + \psi(b) + \phi(b, p)$$

Donde:

- δ^* es tal que $\frac{\mathbb{E}[U(W_s(T))]}{\mathbb{E}[U(W_f(T))]} = 1$
- δ^*_{N} es tal que $\frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\mathbb{E}[W_f(T)]} = 1$, además $\frac{\partial \delta^*_{\mathrm{N}}}{\partial \mu} < 0$
- $\psi(b) > 0$, $\lim_{p \to 0} \psi(b) = 0$ y $\frac{\partial \psi(b)}{\partial b} > 0$ donde b es una medida de aversión al riesgo

Descomposición de δ^* con único fondo

Bajo ciertas condiciones, se tiene

$$\delta^* = \delta^*_{\mathrm{N}} + \psi(b) + \phi(b, p)$$

Donde:

- δ^* es tal que $\frac{\mathbb{E}[U(W_s(T))]}{\mathbb{E}[U(W_f(T))]} = 1$
- δ^*_{N} es tal que $\frac{\mathbb{E}[W_s(T)]}{\mathbb{E}[W_f(T)]} = 1$, además $\frac{\partial \delta^*_{\mathrm{N}}}{\partial \mu} < 0$
- $\psi(b) > 0$, $\lim_{p\to 0} \psi(b) = 0$ y $\frac{\partial \psi(b)}{\partial b} > 0$ donde b es una medida de aversión al riesgo
- $\phi(b, p) > 0$, $\lim_{p\to 0} \phi(b, p) = 0$ y $\frac{\partial \phi(b,p)}{\partial p} > 0$ donde p es la densidad de cotización