



Demografía y precios de activos

FABRIZIO ORREGO*

Durante el siglo XX se observó una tasa de natalidad cíclica en los EEUU: 52 millones de personas nacieron entre 1925 a 1944, 79 millones de 1945 a 1964, y 69 millones entre 1965 y 1984. Estos nacimientos condicionaron el comportamiento del ratio de adultos a jóvenes (ratio AJ). Este trabajo estudia los efectos del cambio demográfico, medido por el ratio AJ, sobre el ratio precio-ganancias (PER) y la tasa de interés real en la posguerra. Se construye un modelo de generaciones traslapadas con intercambio puro en el que la evolución del ratio AJ da lugar a ciclos exógenos. Por un lado, el modelo predice que el PER debe estar en fase con el ratio AJ. Por otro lado, dado que la tasa de interés se ajusta para prevenir oportunidades de arbitraje, el modelo también predice que la tasa de interés real debe moverse inversamente con el ratio AJ, excepto después del punto más alto de este ratio. Finalmente, la introducción de altruismo y hábitos de consumo contribuye a mejorar las predicciones cuantitativas del modelo original con efectos demográficos puros.

Palabras Clave : Generaciones traslapadas, demografía, precios de activos, hábitos.

Clasificación JEL : E30, J10.

Durante el siglo XX se observó una tasa de natalidad cíclica en los EEUU: 52 millones de personas nacieron entre 1925 a 1944, 79 millones de 1945 a 1964, y 69 millones entre 1965 y 1984. Estos nacimientos condicionaron el comportamiento del ratio de adultos a jóvenes, también conocido como el ratio AJ. El ratio AJ, que es un estadístico suficiente de la pirámide poblacional en un momento determinado, es calculado como el tamaño de la cohorte entre 40 y 59 años sobre el tamaño de la cohorte entre 20 y 39 años. En este trabajo se estudian los efectos del cambio demográfico, medido por el ratio AJ, sobre el ratio precio-ganancias (PER) y la tasa de interés real en la posguerra.

Se construye un modelo de equilibrio en línea con Geanakoplos y otros (2004). Básicamente, se incorpora una estructura cíclica de edades, que se asemeja a la observada durante la Gran Depresión y el periodo de explosión de nacimientos ocurrido luego de la Segunda Guerra Mundial, en un modelo determinístico de generaciones traslapadas de seis periodos. El comportamiento del ratio AJ da lugar a ciclos exógenos cuya duración es de cuarenta años. Después de comprobar que el equilibrio cíclico existe, se muestra que éste es único utilizando las técnicas introducidas por Kubler y Schmedders (2010). Dos predicciones se derivan del modelo. La primera predicción es que el PER debería estar en fase con el ratio

* Fabrizio Orrego: Especialista de Investigación, Banco Central de Reserva del Perú, Jr. Antonio Miró Quesada 441, Lima 1, Perú. Teléfono: +511 613-2000 (3812) (e-mail: fabrizio.orrego@bcrp.gob.pe).

Este trabajo es una versión del segundo capítulo de la disertación de Fabrizio Orrego enviada a la Escuela de Negocios David A. Tepper de la Universidad Carnegie Mellon (Pittsburgh, Pensilvania) como requisito del grado de Doctor en Economía. Se agradece a Nikita Céspedes por el apoyo en la labor de edición y a Yessenia Collahua por la eficiente labor de traducción.

AJ. Por otra parte, dado que la tasa de interés se ajusta para prevenir oportunidades de arbitraje, la segunda predicción es que la tasa de interés real debe moverse inversamente con el ratio AJ, excepto después del punto más alto de este ratio.

Estas predicciones son cualitativamente consistentes con los datos de posguerra de EEUU. Por un lado, la trayectoria cíclica del ratio AJ coincide con la tendencia de largo plazo del PER a partir de 1950.¹ Por otro lado, desde mediados de la década de 1950 ha habido una relación negativa entre los cambios en el ratio AJ y los cambios en la tendencia de los rendimientos de los bonos reales, con excepción de la década de 1970 cuando tanto el ratio AJ como las tasas de interés cayeron.²

La lógica detrás de estos resultados tiene que ver con que las necesidades financieras de las personas cambian a lo largo de la vida. En términos del modelo de ciclo vital de Modigliani y Brumberg (1954), se espera que una gran proporción de personas adultas, quienes ahorran la mayor parte de sus ingresos corrientes que en cualquier otro momento de la vida, redunde en mayores precios de acciones y bonos.

A continuación se permite que los agentes sean altruistas y tengan preferencias con formación de hábitos. El supuesto de hábitos hace que los agentes ahorren más en las primeras etapas de su vida para mantener los niveles de consumo y los saldos de hábitos anteriores. Debido a que la complementariedad de los bienes aumenta, ahora son necesarias grandes oscilaciones en el precio de las acciones para equilibrar el mercado, lo que mejora las predicciones cuantitativas del modelo original. Así, la versión final del modelo sugiere que el PER debe variar entre 7.9 y 30.7, mientras que los datos de EEUU manifiestan que el PER aumenta de un mínimo de 17.5 en 1955 a alrededor de 22.5 a mediados de 1960, y luego disminuye en las siguientes dos décadas a 7.3, después de lo cual aumenta a alrededor de 26.0 en el año 2006. El modelo también predice que la tasa real de interés de 10 años varía entre -4.0 y 9.9 por ciento, mientras que en la posguerra la tasa de interés real de EEUU varía entre -3.8 y 9.5 por ciento.

El modelo también recoge, aunque cualitativamente, las tendencias de largo plazo de los precios de las acciones y las tasas de interés reales en Japón. Si las previsiones demográficas de las agencias japonesas se toman en cuenta, entonces el modelo predice un aumento en el índice Nikkei y altas tasas de interés reales en los próximos cinco años. Para los EEUU, el modelo predice una disminución del PER y tasas de interés bajas (inclusive negativas) en el siguiente lustro.

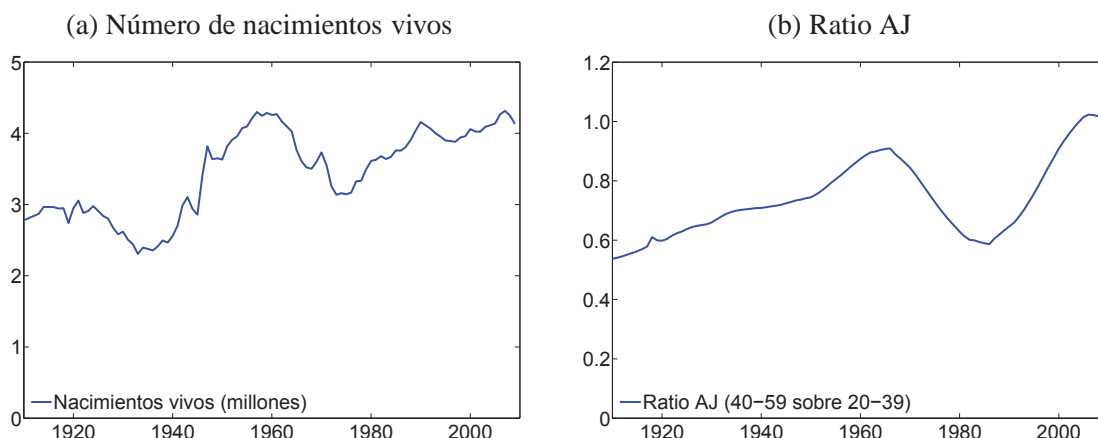
Literatura relacionada

Este documento se relaciona con varios aspectos de la literatura sobre las implicancias económicas de una distribución de edad cambiante. En principio, este trabajo extiende Geanakoplos y otros (2004), quienes originalmente muestran que los precios de las acciones deberían moverse conjuntamente con el ratio AJ y de forma inversa con las tasas de interés real, al menos desde una perspectiva de largo plazo. Por el contrario, aquí se muestra que en un equilibrio cíclico estacionario hay movimientos independientes en los precios de las acciones y bonos, que son necesarios para evitar oportunidades de arbitraje.

Por otro lado, Jaimovich y Siu (2009) investigan las consecuencias del cambio demográfico para en el ciclo económico desde la Segunda Guerra Mundial en los países del G7. Muestran que la composición de edad de la fuerza laboral ha tenido un efecto grande y considerable en la volatilidad cíclica, y representa entre un quinto y una tercera parte de la moderación macroeconómica reciente en EEUU. En el mismo sentido, Fair y Dominguez (1991) utilizan ecuaciones de forma reducida para examinar los efectos de

¹ El ratio AJ es cíclico, con dos picos en 1966 y 2006, y un punto de inflexión en 1986. De esta manera, el modelo captura el mercado alcista de 1945-1965, los mercados bajistas de la década de 1970 y principios de 1980, los posteriores mercados alcistas de 1983-1999, y el mercado bajista de la década de 2000.

² Estos resultados están en línea con Barsky (1989), quien encuentra que en la década de 1970 hubieron grandes caídas en el PER así como disminuciones de la tasa de interés real.

GRÁFICO 1. Número de nacimientos vivos y el ratio AJ en EEUU (1910 - 2009)

FUENTE: Oficina de Censo de EEUU.

los cambios en la distribución de edad poblacional de los EEUU sobre el comportamiento de consumo agregado, inversión en vivienda, demanda de dinero y participación de la fuerza laboral.

Utilizando datos de EEUU del siglo pasado, Poterba (2001, 2004) estudia la relación entre la estructura poblacional por edad y los rendimientos reales de los bonos del Tesoro, bonos a largo plazo del gobierno y las acciones corporativas. El autor encuentra una débil evidencia de los efectos de un cambio de la composición etárea en el rendimiento de los activos. Sin embargo, encuentra una fuerte correlación entre los niveles históricos de los activos y los indicadores de la estructura por edad poblacional. Además, alega que su análisis econométrico puede tener un poder limitado, porque no hay suficientes grados de libertad efectivos en el registro histórico de la estructura de edad. Sus resultados empíricos proporcionan un apoyo modesto, en el mejor de los casos, a la idea de que los precios de los activos podrían disminuir a medida que aumenta la proporción de individuos alrededor de los 65 años de edad.

La inclusión del altruismo en modelos de generaciones traslapadas proviene de Higgins y Williamson (1997) y Brooks (2002), donde los padres financian el consumo de sus hijos. El hecho de que el consumo en los periodos iniciales tiene efectos duraderos sobre el comportamiento económico posterior se toma prestado de la vasta literatura sobre formación de hábitos en la macroeconomía y finanzas (véase Abel, 1990). Este supuesto también está motivado por Malmendier y Nagel (2010), quienes sostienen que experiencias a temprana edad - tal vez transmitidas por los padres - podrían ser particularmente formativas y tener una influencia relativamente fuerte en las decisiones de los individuos.

Este documento está estructurado de la siguiente manera. La sección 1 presenta evidencia para los EEUU. En la sección 2 se introduce el marco teórico. La sección 3 trata de la versión del modelo de intercambio puro, con una breve referencia al caso de una economía con producción. La sección 4 describe la relación entre el altruismo, los hábitos de consumo y los precios de activos. La sección 5 presenta evidencia para el caso de Japón. La última sección concluye.

1 EVIDENCIA PARA LOS EEUU

En esta sección se muestra la evolución de las variables macroeconómicas claves para EEUU en el siglo XX principalmente, así como algunas variables microeconómicas construidas a partir de la Encuesta de las Finanzas del Consumidor (SCF por sus siglas en inglés) realizada en el año 2007.

Evidencia macroeconómica

En el panel (a) del Gráfico 1 (p. 85) se muestra el número de nacimientos vivos en EEUU desde el comienzo del siglo XX hasta 2009. Una de las características más saltantes del panel (a) es que el número de nacimientos muestra oscilaciones de largo plazo. Según la Oficina del Censo de EEUU, hubieron 52 millones de nacimientos entre 1925 y 1944 (la Gran Depresión), 79 millones desde 1945 y 1964 (periodo de auge de nacimientos luego de la Segunda Guerra Mundial) y 69 millones entre 1965 y 1984 (Generación X). Asimismo, desde 1985 la economía de EEUU experimenta un auge de nacimientos que es del mismo orden de magnitud que el observado inmediatamente después de la Segunda Guerra Mundial.

Por otra parte, en el panel (b) del Gráfico 1 se muestra el ratio AJ. En cualquier periodo de tiempo, el ratio AJ debe interpretarse como la relación entre el tamaño de la cohorte de 40 a 59 años al tamaño de la cohorte de 20 a 39 años de edad. Es evidente que los flujos que se muestran en el panel (a) han provocado cambios sistemáticos en la composición de edad de la población estadounidense, especialmente después de la segunda mitad de la década de 1950.

Dado que este trabajo estudia los efectos del comportamiento cíclico del ratio AJ sobre variables macrofinancieras, la atención se restringe al periodo de 1955 hasta 2009. En el panel (a) del Gráfico 2 (p. 87) se muestra la evolución del índice Standard & Poor's expresado en dólares de 2010. Claramente, este índice real no parece una serie estacionaria, por lo que se presenta en el panel (b) el PER ajustado por el ciclo.³ En el panel (c) se muestra la evolución *ex-ante* de las tasas de interés reales para diferentes vencimientos. Tanto a corto plazo como a largo plazo las tasas de interés reales se mueven en la misma dirección, y la brecha entre las dos es un subproducto de una curva de rendimientos con pendiente positiva. Por último, el panel (d) muestra el comportamiento del ratio AJ desde 1955 hasta el 2009.

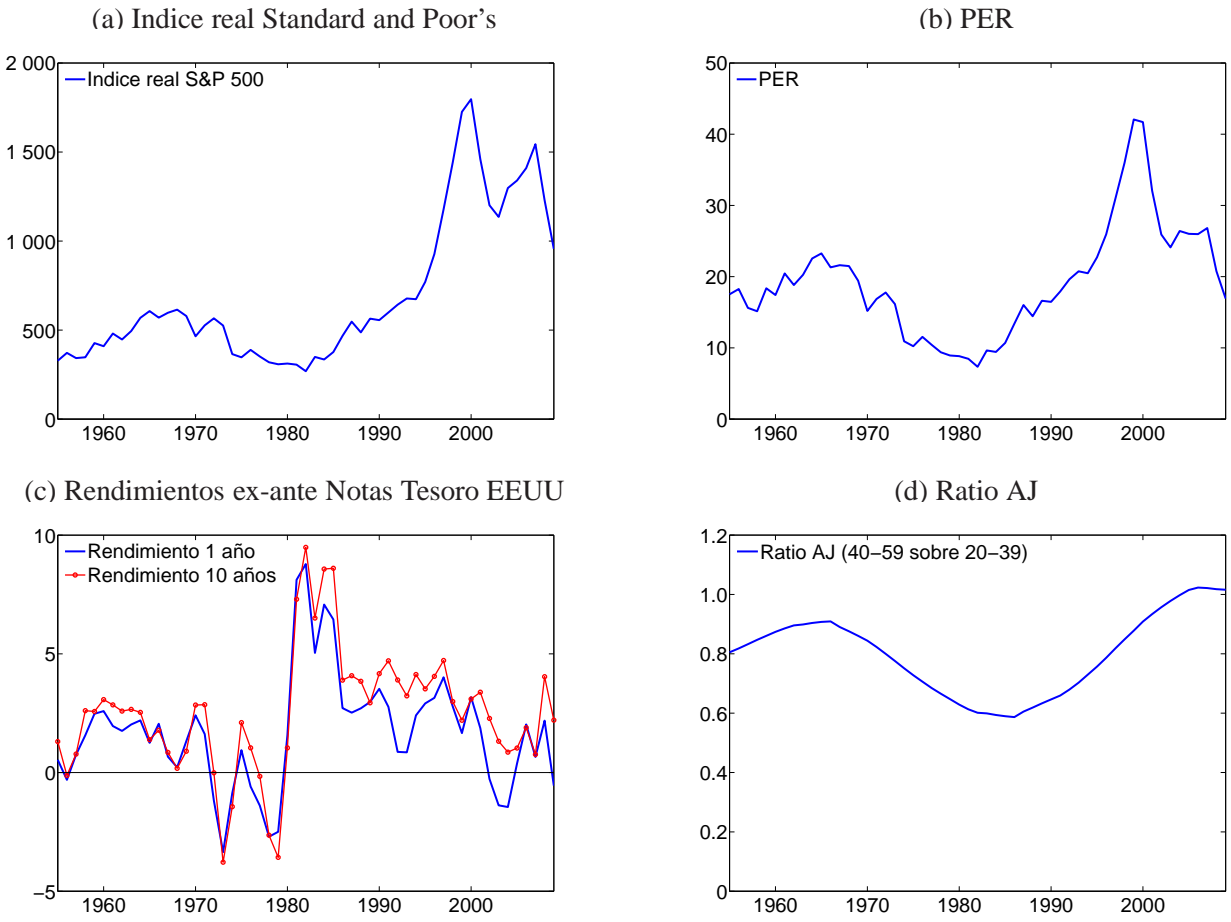
Evidencia microeconómica

En este apartado se detallan los perfiles del ciclo de vida de los ingresos laborales, los activos totales y patrimonio neto. Para ello, utilizan datos de Glover y otros (2011), quienes a su vez usan el SCF realizado en el 2007. El ingreso laboral incluye los salarios y los ingresos salariales, las dos terceras partes de los ingresos comerciales, agrícolas o por cuenta propia, los ingresos de seguridad social, y una variedad de transferencias públicas y privadas. Por otro lado, el patrimonio neto es medido como el valor de los activos financieros y no financieros, menos el valor de todos los pasivos y el valor actual de las pensiones futuras relacionadas con los planes definidos de prestaciones privadas y de seguridad social. Glover y otros (2011) construyen estos perfiles utilizando el promedio de los hogares divididos en grupos de edad de diez años. Sus resultados se muestran en los paneles (a) y (b) del Gráfico 3 (p. 87).

Se desprende del panel (a) del Gráfico 3 que el ingreso sigue la conocida forma de joroba durante el ciclo de vida, y el pico se alcanza cuando el hogar es de 50 a 59 años de edad. Sin embargo, se puede observar en el panel (b) que el pico de los activos se alcanza algo más tarde (cuando el hogar es de 60 a 69 años de edad). Según lo predicho por el modelo de ciclo de vida de Modigliani y Brumberg (1954), los ciudadanos de EEUU acumulan la mayor cantidad de recursos entre los 40 y 59 años de edad. De hecho, durante los años de ahorro los ciudadanos aumentan sus activos y patrimonio neto en US\$ 623 mil y US\$ 626 mil, respectivamente.

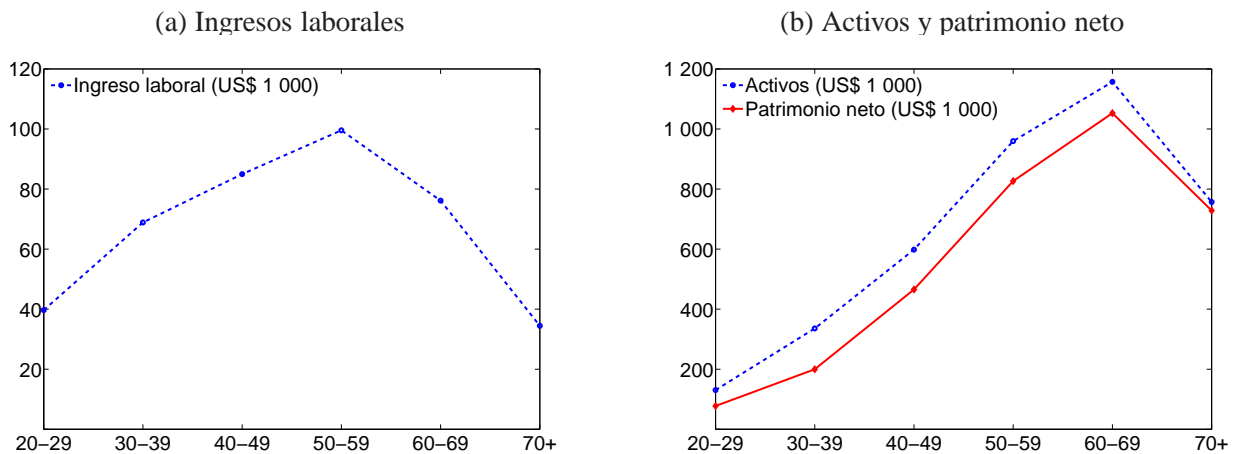
³ El PER ajustado por el ciclo promedia diez años de beneficios, por lo que atenúa el impacto del ciclo económico.

GRÁFICO 2. Indicadores financieros, rendimientos ex-ante de Notas de Tesoro y ratio AJ (1955 - 2009)



FUENTE: Oficina de Censo de EEUU, economagic.com y portal web del Profesor Robert Shiller (Universidad de Yale).

GRÁFICO 3. Ingresos, activos y patrimonio neto en el ciclo de vida (EEUU, 2007)



FUENTE: Glover y otros (2011).

2 ESTRUCTURA TEÓRICA

En esta sección se presentan las bases del modelo teórico que se empleará en la siguiente sección. El objetivo será construir un modelo de generaciones traslapadas cuyos precios de estado estacionario capturen el comportamiento del PER y la tasa de interés real de largo plazo observados en EEUU.

2.1 MODELO BÁSICO CON CRECIMIENTO POBLACIONAL EXÓGENO

Considere una economía de intercambio puro de generaciones traslapadas. Los agentes viven tres periodos de veinte años cada uno, que reciben el nombre de juventud, adultez y retiro. Cada agente tiene una dotación fija de por vida $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, donde ω_j es la cantidad exógena no negativa de consumo del único bien de la economía. Además existe un activo de vida infinita (la tierra) en oferta neta positiva que paga $d > 0$ dividendos cada periodo. El crecimiento de la población $m > 0$ es exógeno, tal que para cada persona jubilada en un periodo determinado, hay $(1 + m)$ adultos y $(1 + m)^2$ jóvenes.

La utilidad U del agente típico depende únicamente del consumo a lo largo de su vida, es decir, $U = u(c_{1,t}) + \delta u(c_{2,t+1}) + \delta^2 u(c_{3,t+2})$, donde $\delta \in (0, 1)$ es el factor de descuento subjetivo, u es estrictamente cóncava y estrictamente creciente, y $c_{k,j}$ representa el consumo en el tiempo j cuando el agente se encuentra en la k -ésima etapa de la vida, para $k = 1, 2, 3$.

Como es habitual en la literatura (véase, por ejemplo, Geanakoplos, 2005, 2008), q representa el precio que se pagaría hoy con el fin de obtener una unidad de consumo en un periodo posterior. Por otra parte, $q \equiv 1/(1 + r)$ representa también el factor de descuento de mercado, donde r es la tasa de interés de un periodo. En un equilibrio estacionario, en el cual se ignoran las generaciones iniciales, la restricción presupuestaria de un agente joven puede ser escrita como

$$B(q) = \{(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}_+^3 : c_1 + qc_2 + q^2c_3 \leq \omega_1 + q\omega_2 + q^2\omega_3\}. \quad (1)$$

Nótese que se ha suprimido el índice t . Esto significa, entre otras cosas, que el periodo en el cual se nace no tiene importancia en ningún estado estacionario. Después de una aplicación rutinaria del teorema de la función implícita, las canastas óptimas de consumo se pueden definir como

$$[c_1(q), c_2(q), c_3(q)] \in \operatorname{argmax} \{U : (c_1, c_2, c_3) \in B(q)\}. \quad (2)$$

Dadas las propiedades de la función de utilidad, cada componente del vector $[(c_1(q), c_2(q), c_3(q))]$ es una función continua definida de forma única. Sea $[z_1(q), z_2(q), z_3(q)] = [c_1(q) - \omega_1, c_2(q) - \omega_2, c_3(q) - \omega_3]$ el exceso de demanda individual de los jóvenes, adultos y ancianos, respectivamente. Luego el vector de exceso de demanda agregada es

$$[\tilde{z}_1(q), \tilde{z}_2(q), \tilde{z}_3(q)] = [(1 + m)^2 z_1(q), (1 + m) z_2(q), z_3(q)]. \quad (3)$$

El problema de encontrar el valor de q en el estado estacionario ha sido ampliamente estudiado en la literatura (véase Balasko y otros, 1980). La condición de equilibrio para el mercado de bienes

$$\tilde{z}_1(q) + \tilde{z}_2(q) + \tilde{z}_3(q) - d = 0, \quad (4)$$

es básicamente una ecuación en una incógnita. Bajo el supuesto adicional de sustituibilidad bruta, Kehoe y otros (1991) muestran que hay un único equilibrio estacionario con tierra en modelos de este tipo.⁴

⁴ Dos bienes i y j son sustitutos brutos si el exceso de demanda del bien i aumenta cuando se incrementa el precio del bien j .

2.2 MODELO BÁSICO CON PIRÁMIDES POBLACIONALES EXÓGENAS

Una limitación de la anterior configuración es que en cualquier estado estacionario q es siempre menor que uno (esto se deduce del hecho de que el precio de la tierra es $q^e = qd/(1 - q)$), lo cual implica que la tasa de interés libre de riesgo r de un periodo siempre es mayor que cero. Sin embargo, esto es inconsistente con la evidencia presentada en la sección anterior. A luz del panel (c) del Gráfico 2, EEUU ha experimentado largos periodos de tasas de interés reales negativas.

Geanakoplos y otros (2004) sostienen sin embargo que es posible construir un estado estacionario cíclico en el que la tasa de descuento del mercado q se alterna entre q_1 en periodos impares y q_2 en periodos pares. Si este patrón ocurre, entonces el precio de la tierra fluctúa entre $q_1^e = d(q_1q_2 + q_1)/(1 - q_1q_2)$ y $q_2^e = d(q_2q_1 + q_2)/(1 - q_2q_1)$. Nótese que esta modelación abre la posibilidad de tasas de interés negativas, porque la única restricción en las tasas de interés es que $q_1q_2 < 1$ o, alternativamente, $(1 + r_1)(1 + r_2) > 1$ en cualquier equilibrio estacionario. En matemáticas, este comportamiento cíclico implica que la tasa de descuento del mercado es módulo aritmético de orden 2.

Los autores construyen un ciclo exógeno de dos periodos de la siguiente manera. En primer lugar observan que la tasa de natalidad en EEUU el siglo pasado se comporta como si existiese un ciclo poblacional que se repite cada cuarenta años. En otras palabras, el número de personas que ingresan a la economía en el periodo $t + 2$ es el mismo que en t . Así en periodos impares hay una pirámide de población Δ_1 compuesto por N jóvenes, n adultos y N retirados, mientras que en periodos pares la pirámide poblacional Δ_2 consta de n jóvenes, N adultos y n retirados. El supuesto clave es que a pesar de que todos los agentes tienen las mismas preferencias y dotaciones, estos difieren en la fecha en que entran a la escena económica. En un equilibrio estacionario, las preferencias están representadas por $U_p = \sum_{k=1}^3 \delta^{k-1} u(c_{k,p})$ donde δ y u se definen como antes, pero ahora los índices $p = 1, 2$ y $k = 1, 2, 3$ representan la pirámide en la que nace el agente y la etapa de la vida, respectivamente.⁵

Formalmente, un equilibrio estacionario se define como sigue:

DEFINICIÓN 1. Dado $\omega \geq 0$ y $(\delta, N, n, d) \gg 0$, un estado estacionario cíclico consiste de precios positivos $q^* = (q_1^*, q_2^*) \gg 0$ y asignaciones $c_{k,p}(q^*)$ para $k = 1, 2, 3$ y $p = 1, 2$, tales que

a) Dado q^* las canastas óptimas de consumo satisfacen para $p = 1, 2$

$$[c_{1,p}(q^*), c_{2,p}(q^*), c_{3,p}(q^*)] \in \operatorname{argmax}\{U_p : (c_{1,p}, c_{2,p}, c_{3,p}) \in B_p(q^*)\}$$

donde

$$B_1(q_1, q_2) = \{(c_{1,1}, c_{2,1}, c_{3,1}) \in \mathbb{R}_+^3 : c_{1,1} + q_1c_{2,1} + q_1q_2c_{3,1} \leq \omega_1 + q_1\omega_2 + q_1q_2\omega_3\}$$

$$B_2(q_2, q_1) = \{(c_{1,2}, c_{2,2}, c_{3,2}) \in \mathbb{R}_+^3 : c_{1,2} + q_2c_{2,2} + q_2q_1c_{3,2} \leq \omega_1 + q_2\omega_2 + q_2q_1\omega_3\}$$

b) En términos de las funciones de exceso de demanda individuales, los mercados de bienes se equilibran en cada pirámide

$$Nz_{1,1}(q^*) + nz_{2,2}(q^*) + Nz_{3,1}(q^*) - d = 0$$

$$nz_{1,2}(q^*) + Nz_{2,1}(q^*) + nz_{3,2}(q^*) - d = 0$$

c) Los factores de descuento del mercado satisfacen $0 < q_1^*q_2^* < 1$.

⁵ Cuando Geanakoplos y otros (2004) llevan el modelo a los datos, suponen que $u(\cdot)$ es de la clase de aversión al riesgo relativa constante, con parámetro σ (la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal), y utilizan datos de posguerra de EEUU para calibrar los ocho parámetros libres en el modelo, a saber $\theta \equiv (\sigma, \delta, \omega_1, \omega_2, \omega_3, N, n, d)$. En términos generales, los valores de (ω, N, n) y d se calibrán a partir de series de tiempo históricas de la Oficina de Censo de EEUU y la Oficina de Análisis Económico de EEUU, respectivamente. Los valores de (σ, δ) son los usuales, de acuerdo con estudios anteriores.

Esta sección concluye con observaciones sobre cómo el modelo puede ser interpretado y generalizado:

Comentario 1. La predicción básica es que q_1^* es menor que q_2^* . Este resultado implica que el precio de la tierra en los periodos impares q_1^e es menor que el precio de la tierra en periodos pares q_2^e (esto se desprende de la definición del precio de la tierra, la cual satisface $q_p^e/q_p = d + q_{p+1}^e$, para $p = 1, 2$). Intuitivamente, hay exceso de demanda de tierra en periodos pares (cuando la proporción AJ es alta), porque los N adultos desean acumular activos para su jubilación, pero sólo n jóvenes son capaces de prestar. Como la oferta neta de la tierra es fija, el precio de la tierra debe subir para restablecer el equilibrio. Por el contrario, en los periodos impares (cuando la proporción AJ es pequeña) hay exceso de oferta de terrenos y por lo tanto el precio de la tierra es bajo.

Comentario 2. Los agentes tienen previsión perfecta. En particular, pueden anticipar que el rendimiento de la tierra cuando $\Delta_1 = (N, n, N)$ es mayor que el rendimiento de la tierra cuando $\Delta_2 = (n, N, n)$. Esto sugiere que el consumo cuando adulto es relativamente barato para las generaciones grandes y relativamente caro para las generaciones pequeñas. Si la elasticidad de sustitución intertemporal es alta, entonces los adultos en cohortes grandes sustituyen ahorro por consumo y, por lo tanto, el exceso de demanda de tierra se contrae en periodos pares. Por el contrario, los adultos en cohortes pequeñas sustituyen consumo por ahorro y por lo tanto, el exceso de oferta de tierra se reduce en periodos impares. Geanakoplos y otros (2004) sostienen que cuando $\sigma = 4$, el efecto sustitución es reducido y por ello es posible observar grandes cambios en los precios de la tierra entre los periodos impares y pares. De hecho, el equilibrio estacionario es sensible a la elección de σ (se abordará este tema más adelante).

Comentario 3. El modelo básico de Geanakoplos y otros tiene un defecto. Debido a que hay dos pirámides, la tasa de interés real es baja cuando el precio de la tierra es alto y viceversa.⁶ En otras palabras, el modelo es incapaz de explicar por qué en la década de 1970 las tasas de interés y los precios de las acciones (precio de la tierra en el modelo) se movieron en la misma dirección en los EEUU, como originalmente ha sido documentado por Barsky (1989). Sin embargo, cuando el equilibrio estacionario va más allá de los ciclos de dos periodos, las tasas de interés y los precios de la tierra pueden moverse de forma independiente.^{7,8} Se utilizará este argumento en la próxima sección.

3 MODELO EXTENDIDO CON PIRÁMIDES DE POBLACIÓN EXÓGENAS

Con el fin de desvincular el comportamiento de las tasas de interés de los precios de la tierra, se considera en esta sección un ciclo de longitud 4. Se mantiene el supuesto de que el ciclo de la población se repite cada cuarenta años y, por lo tanto, el número de personas que ingresan a la economía en el periodo $t + 5$ es el mismo que en t . Claramente, ahora se necesitan generaciones de diez años. Esto no es totalmente arbitrario ya que, por ejemplo la Generación Jones se define típicamente como la segunda mitad del periodo de auge de nacimientos observado en la posguerra (es decir, abarca desde 1955 a 1964). Los detalles se discuten a continuación.

⁶ Debe quedar claro que los ciclos en este modelo de generaciones no se producen de forma endógena, como en Grandmont (1985), Azariadis y Guesnerie (1986) o Goenka y otros (1998).

⁷ Geanakoplos y otros también estudian el caso con 10 pirámides y periodos de 4 años, con el fin de separar el comportamiento de las tasas de interés de los precios de las acciones. Ellos predicen que: (i) a largo plazo (20 años) las tasas reales de interés se encuentran en fase inversa con los precios de acciones y la proporción AJ, y (ii) las tasas de largo plazo están por debajo de las tasas de corto plazo (4 años) en la fase ascendente de precios de las acciones y por encima de ellos en la fase descendente. Lamentablemente, como aprecia en el Gráfico 2, ambas predicciones son difíciles de conciliar con los datos.

⁸ Desde el punto de vista teórico, el modelo puede soportar ciclos de longitud P , donde P es un número natural mayor que 2, siempre que existan exactamente P condiciones de mercados en equilibrio, una para cada pirámide $p = 1, \dots, P$.

CUADRO 1. Estructura cíclica de edades

| Edad | Pirámides | | | |
|---------|------------|------------|------------|------------|
| | Δ_1 | Δ_2 | Δ_3 | Δ_4 |
| 20 - 30 | n_1 | n_2 | n_3 | n_4 |
| 30 - 40 | n_4 | n_1 | n_2 | n_3 |
| 40 - 50 | n_3 | n_4 | n_1 | n_2 |
| 50 - 60 | n_2 | n_3 | n_4 | n_1 |
| 60 - 70 | n_1 | n_2 | n_3 | n_4 |
| 70 - 80 | n_4 | n_1 | n_2 | n_3 |

Estructura demográfica. Hay cuatro pirámides Δ_p en esta economía, cuya composición se detalla en el Cuadro 1. Sea Δ_p^j el tamaño de la j -ésima cohorte en la p -ésima pirámide (por ejemplo, $\Delta_1^2 = \Delta_4^5 = n_4$). Se supone que $n_1 > 0$ personas entran en la economía a principios de la pirámide Δ_1 , $n_2 > 0$ personas entran en la economía a principios de la pirámide Δ_2 , y así sucesivamente. La composición final de cada pirámide refleja el hecho de que el ciclo de la población se repite cada cuarenta años. Así, a partir del Cuadro 1 se deduce que la proporción AJ en cada pirámide está dada por

$$AJ_p = \frac{\Delta_p^3 + \Delta_p^4}{\Delta_p^1 + \Delta_p^2}. \quad (5)$$

Preferencias. Las preferencias de los agentes son representadas por una suma descontada de utilidades $U_p = \sum_{k=1}^6 \delta^{k-1} u(c_{k,p})$, donde δ , $u(\cdot)$ y $c_{k,p}$, están definidos como en la sección anterior. Los perfiles de consumo difieren en la fecha en que los agentes se incorporan a la escena económica. Para la calibración, $u(\cdot)$ es una función de utilidad del tipo $u(c_{k,p}) = c_{k,p}^{1-\sigma}/(1-\sigma)$, con $\sigma > 0$, donde σ es la inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal.

Acuerdos de mercado. Los agentes compran y venden acciones e para redistribuir sus ingresos a través del tiempo. Las acciones son instrumentos financieros que existen en oferta neta positiva, normalizada a 1, y pagan un dividendo d cada periodo. Sea q_p^e el precio de la acción en la pirámide p , y sea $q_p \equiv (1+r_p)^{-1}$ el factor de descuento de mercado, donde r_p es la tasa de interés real vigente desde la pirámide p para la pirámide $p+1$. En la economía sin incertidumbre, la condición de ausencia de arbitraje requiere que

$$(D + q_{p+1}^e)/q_p^e = 1/q_p = 1 + r_p, \quad (6)$$

lo que significa que el rendimiento de la tierra (el lado izquierdo de la ecuación) debe ser igual a la tasa de interés bruta. Para un uso posterior, sea \tilde{r}_p la tasa de interés anualizada, de tal manera que $(1+r_p)^{1/10} \equiv 1+\tilde{r}_p$.

El problema de los individuos. El agente cuando joven elige $c_{k,p}$ y $e_{k,p}$ para maximizar U_p sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} c_{1,p} &\leq \omega_1 - q_p^e e_{1,p} \\ c_{2,p} &\leq \omega_2 + (d + q_{p+1}^e) e_{1,p} - q_{p+1}^e e_{2,p} \\ c_{3,p} &\leq \omega_3 + (d + q_{p+2}^e) e_{2,p} - q_{p+2}^e e_{3,p} \\ c_{4,p} &\leq \omega_4 + (d + q_{p+3}^e) e_{3,p} - q_{p+3}^e e_{4,p} \\ c_{5,p} &\leq \omega_5 + (d + q_p^e) e_{4,p} - q_p^e e_{5,p} \\ c_{6,p} &\leq \omega_6 + (d + q_{p+1}^e) e_{5,p}, \end{aligned}$$

además de las habituales restricciones de no negatividad en el consumo. Dado que los mercados son completos, es posible trabajar con una única restricción de presupuesto del tipo Arrow-Debreu

$$c_{1,p} + q_p c_{2,p} + q_p q_{p+1} c_{3,p} + q_p q_{p+1} q_{p+2} c_{4,p} + q_p q_{p+1} q_{p+2} q_{p+3} c_{5,p} + q_p q_{p+1} q_{p+2} q_{p+3} q_p c_{6,p} = \omega_1 + q_p \omega_2 + q_p q_{p+1} \omega_3 + q_p q_{p+1} q_{p+2} \omega_4 + q_p q_{p+1} q_{p+2} q_{p+3} \omega_5 + q_p q_{p+1} q_{p+2} q_{p+3} q_p \omega_6 .$$

Equilibrio. En este modelo, el número de condiciones de limpieza de mercados es igual al número de pirámides en la población. Debido a la Ley de Walras, es suficiente limpiar el mercado de bienes

$$\begin{aligned} n_1 z_{1,1} + n_4 z_{2,4} + n_3 z_{3,3} + n_2 z_{4,2} + n_1 z_{5,1} + n_4 z_{6,4} - d &= 0 \\ n_2 z_{1,2} + n_1 z_{2,1} + n_4 z_{3,4} + n_3 z_{4,3} + n_2 z_{5,2} + n_1 z_{6,1} - d &= 0 \\ n_3 z_{1,3} + n_2 z_{2,2} + n_1 z_{3,1} + n_4 z_{4,4} + n_3 z_{5,3} + n_2 z_{6,2} - d &= 0 \\ n_4 z_{1,4} + n_3 z_{2,3} + n_2 z_{3,2} + n_1 z_{4,1} + n_4 z_{5,4} + n_3 z_{6,3} - d &= 0 . \end{aligned}$$

Formalmente, un equilibrio estacionario para esta economía se describe como en la Definición 1. En un equilibrio estacionario, las secuencias de equilibrio de los precios de las acciones y las tasas de descuento del mercado son aritméticas módulo 4, lo cual implica, por ejemplo, que q_{p+4} es congruente con q_p .

Calibración. En esta subsección se calibran los trece parámetros del modelo, a saber

$$\tilde{\theta} \equiv (\sigma, \delta, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, n_1, n_2, n_3, n_4, d) \quad (7)$$

tomando en cuenta los factores demográficos y económicos de la posguerra en EEUU. Se reportan los valores de todos los parámetros en el Cuadro 2 (p. 93).

Tamaños de las cohortes. La elección del tamaño de las cohortes $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (26.1, 26.4, 36.9, 42.0)$ coincide con los datos observados durante la Gran Depresión y el periodo de explosión de nacimientos luego de la Segunda Guerra Mundial. En las dos primeras pirámides se introducen las cohortes pequeñas, con $n_1 + n_2 \approx 52$ y en las siguientes dos pirámides se introducen las cohortes grandes, con $n_3 + n_4 \approx 79$. Luego el ciclo se repite. Estas cifras implican que los valores del ratio AJ en cada pirámide son

$$(AJ_1, AJ_2, AJ_3, AJ_4) = (0.92, 1.50, 1.08, 0.67) . \quad (8)$$

Factor de descuento y la elasticidad de sustitución. En este modelo, un periodo representa diez años en la vida de un agente, por lo que el factor de descuento es $\delta = 0.75$ (corresponde a un factor de descuento intertemporal anual de 0.975). La inversa de la elasticidad de sustitución intertemporal es igual a $\sigma = 4$ (también se estudia el caso de $\sigma = 6$).

Ingresos salariales. Debido a que las preferencias son homotéticas, sólo importan los salarios relativos. Se utiliza la información de la Oficina del Censo de los EEUU (Tabla H-10, Edad de las familias: Todas las razas por ingreso mediano y promedio: 1967 a 2008) para calcular las brechas entre los ingresos reales anuales promedio de agentes en los grupos de edad de 15-24, 25-34, 35-44 y 45-54. Los agentes se jubilan a los 60 años de edad (los ingresos en la jubilación son iguales a cero).

La máxima proporción de los ingresos medios anuales de los agentes en los grupos de edad 45-54 y 25-34 es de 1.54, y los ratios correspondientes entre los grupos de edad 35-44 y 25-34, y 25-34 años y 15-24 años son 1.32 y 1.63, respectivamente. Si $\omega_2 = 2$ sirve como numerario, el perfil de dotaciones es $\omega = (1.23, 2, 2.64, 3, 0, 0)$. Este perfil también es consistente con el hecho de que las rentas del trabajo comienza a disminuir cuando el agente tiene 60 años (ver Gráfico 3).

CUADRO 2. Configuración de parámetros

| Parámetro | Descripción | Valor |
|------------|------------------------------------------|-------|
| σ | Inversa de la elasticidad de sustitución | 4.00 |
| δ | Factor descuento intertemporal | 0.75 |
| n_1 | Tamaño cohorte inicial en Δ_1 | 26.07 |
| n_2 | Tamaño cohorte inicial en Δ_2 | 26.40 |
| n_3 | Tamaño cohorte inicial en Δ_3 | 36.76 |
| n_4 | Tamaño cohorte inicial en Δ_4 | 41.96 |
| ω_1 | Dotación 20-30 años de edad | 1.23 |
| ω_2 | Dotación 30-40 años de edad | 2.00 |
| ω_3 | Dotación 40-50 años de edad | 2.64 |
| ω_4 | Dotación 50-60 años de edad | 3.00 |
| ω_5 | Dotación 60-70 años de edad | 0.00 |
| ω_6 | Dotación 70-80 años de edad | 0.00 |
| d | Dividendos | 55.27 |

Dividendos. En línea con Geanakoplos y otros (2004), se asume que el ratio de dividendos generalizados a salarios generalizados es 0.19 en promedio. Los salarios en cada Δ_p son iguales a $\omega_{\Delta_p} = \Delta_p^1 \omega_1 + \Delta_p^2 \omega_2 + \Delta_p^3 \omega_3 + \Delta_p^4 \omega_4 + \Delta_p^5 \times 0 + \Delta_p^6 \times 0$. Así, en esta economía $(\omega_{\Delta_1}, \omega_{\Delta_2}, \omega_{\Delta_3}, \omega_{\Delta_4}) = (292, 306, 293, 273)$. Por lo tanto, $d = 0.19[(292 + 306 + 293 + 273)/4] \approx 55.27$.

Existencia y unicidad

A continuación se discuten dos resultados de importancia, vinculados con la existencia y unidad del estado estacionario en esta economía. Las pruebas de las dos proposiciones que se presentan a continuación se detallan en Orrego (2011).

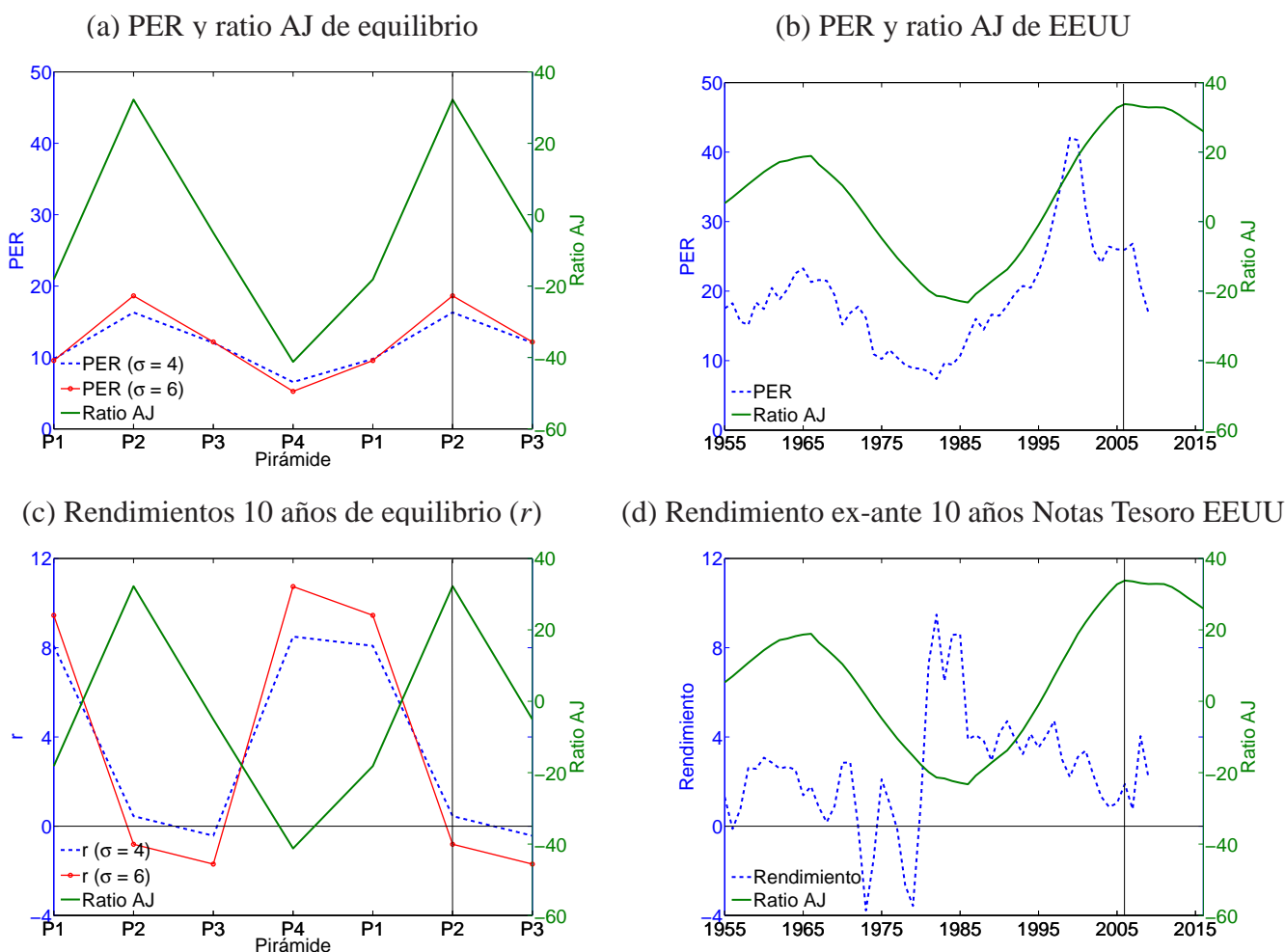
En primer lugar, se demuestra que el modelo admite una solución de estado estacionario. Éste es el contenido de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1. *Existe al menos un estado estacionario cíclico en esta economía.*

La Proposición 1 no es útil, sin embargo, para saber si el equilibrio estacionario es único. A pesar de que la unicidad no es un tema exclusivamente relacionado con los modelos de equilibrio general, o modelos de generaciones traslapadas en particular, se debe reconocer su importancia. Afortunadamente, Kubler y Schmedders (2010) han desarrollado recientemente herramientas teóricas que utilizan las bases de Gröebner para hacer frente a la multiplicidad de equilibrios en una variedad de entornos, incluyendo los modelos de equilibrio general. La idea fundamental de las bases de Gröebner es que el cálculo de todas las soluciones de un sistema de equilibrio determinado se reduce a encontrar todas las raíces de un polinomio con una sola incógnita. Las otras incógnitas luego se encuentran de forma recursiva. Este razonamiento se deriva del Lema de Shape, un resultado de la geometría algebraica que establece que bajo ciertas condiciones un sistema dado tiene la misma solución que un sistema triangular más simple.

El estado estacionario, tal como se presenta en la Definición 1, se puede describir como la solución de un sistema de ecuaciones polinómicas (básicamente, las condiciones de primer orden y las condiciones de equilibrio del mercado para cada pirámide). Siguiendo a Kubler y Schmedders (2010), se encuentra que el sistema admite un único equilibrio estacionario, en el que el factor de descuento del mercado es módulo aritmético de orden 4. Éste es el contenido de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 2. *El equilibrio cíclico en esta economía es único.*

GRÁFICO 4. Predicciones del modelo y evidencia para EEUU (1955 - 2016)

FUENTE: Gráfico 2 y cálculos propios.

Resultados

Se utiliza SINGULAR para calcular el equilibrio cíclico.⁹ En el panel (a) del Gráfico 4 se muestra el PER obtenido del modelo y en el panel (c), la tasa de interés real de equilibrio a 10 años anualizada. El PER se construye asumiendo que las corporaciones distribuyen la mitad de sus ganancias como dividendos, como en Geanakoplos y otros (2004). En otras palabras, el PER en cada pirámide es $PER_p = [q_p^e / (d/10)] / 2$. En ambos paneles, la línea discontinua corresponde al caso en el que $\sigma = 4$ (por lo tanto, la elasticidad de sustitución intertemporal es $1/4$), mientras que la línea de puntos corresponde al caso en el que $\sigma = 6$. Por último, la línea continua corresponde a la proporción AJ expresada en desviaciones porcentuales con respecto a la media. El eje de las abscisas indica la pirámide correspondiente. Por otro lado, en el panel (b) del Gráfico 4 se muestra el PER ajustado cíclicamente, mientras que en el panel (d) se muestra el rendimiento real ex-ante anualizado a 10 años de los bonos del Tesoro. En ambos casos, también se incluye la trayectoria histórica del ratio AJ, en desviaciones respecto a la media, que incluye las proyecciones de población hasta el año 2016 y de esta manera se extiende la información provista en el Gráfico 2.

Es evidente del panel (a) del Gráfico 4, que el ratio AJ y el PER se mueven sincronizadamente. Como

⁹ SINGULAR es un programa que permite trabajar con bases de Gröbner, y que está disponible libre de costo en www.singular.unikl.de.

ya se explicó en la sección 2, los hogares en este modelo son más propensos a ahorrar cuando se acercan a la jubilación, debido al perfil de ingreso en forma jorobada. Cuando el número de hogares en los años de ahorro es alto en relación al número de hogares jóvenes, los precios de las acciones suben en respuesta al exceso de demanda, debido a que la oferta de acciones es fija. Del mismo modo, cuando el número de hogares en los años de ahorro es bajo en relación al número de hogares jóvenes, el precio de las acciones disminuye. La relación entre el ratio AJ y el PER predicha por el modelo está en línea con la información de EEUU mostrada en el panel (b). Más aún, la trayectoria proyectada del ratio AJ en el panel (b) hasta fines de 2016, que es consistente con la orientación del ratio AJ del panel (a) a partir de la línea vertical, sugiere que EEUU debería esperar una tendencia decreciente en el PER en los próximos años, en línea con el comportamiento del PER de equilibrio del panel (a) luego de la línea vertical.

En el panel (c) se observa que la tasa de interés real se ajusta para prevenir las oportunidades de arbitraje: la tasa de interés es baja cuando se espera que el PER disminuya y viceversa. En particular, la tasa de interés es baja en las pirámides 2 y 3, porque los agentes anticipan caídas en el PER (o en los precios de las acciones) en las pirámides 3 y 4, debido a que los individuos nacidos en grandes cohortes comienzan a entrar en el mercado de trabajo. Dado que las tasas de interés disminuyen después del pico en la proporción AJ, no siempre es posible observar una relación negativa entre los cambios en la proporción AJ y cambios en la tendencia de largo plazo de las tasas de interés. La relación entre el ratio AJ y la tasa de interés predicha por el modelo coincide con los datos de EEUU mostrados en el panel (d). Los pronósticos del modelo también están en línea con Barsky (1989), quien señala que durante la década de 1970 se observaron disminuciones de las tasas de interés reales y grandes caídas en el PER.

En términos cuantitativos, el modelo predice que los valores más bajos del PER varían entre 5.3 y 6.6, mientras que los más altos valores varían entre 16.3 y 18.6. Estos resultados son congruentes con los datos históricos, donde el PER aumenta de un mínimo de 17.5 en 1955 a alrededor de 22.5 a mediados de 1960, y luego disminuye en las dos décadas siguientes a 7.3, después de lo cual se incrementa a 26.0 en 2006 (obviamente el modelo no es capaz de capturar la burbuja *punto com* de la década de 1990).

El modelo predice además que las tasas de interés reales de equilibrio más bajas varían entre -0.4 y 1.7 , mientras que las más altas tasas de interés varían entre 8.5 y 10.7 . Según datos de posguerra de EEUU, las tasas de interés a largo plazo en la década de 1970 son del orden de -3.5 y -3.8 por ciento, las que aumentan a entre 8.6 y 9.5 por ciento en la década de 1980. Los datos son consistentes, sin embargo, con las fluctuaciones de baja frecuencia del modelo, en el sentido de que los cambios en la tendencia de las tasas de interés reales son inversamente proporcionales a los cambios de la relación AJ, excepto después del pico de ésta (el primer pico en la relación AJ se produce en 1966, y las tasas de interés reales bajan durante la mayor parte de la década de 1970).¹⁰

4 ALTRUISMO Y HÁBITOS DE CONSUMO

Uno de los supuestos del modelo de la sección anterior es que la vida económica de un agente comienza a la edad de veinte años. Ahora se asume además que los agentes de esa edad tienen hijos, quienes a su vez entran al mercado de trabajo dos periodos después. Una vez que los hijos entran al mercado laboral a la edad de veinte años, se convierten en padres jóvenes y activos tomadores de decisiones de forma

¹⁰ Es bueno mencionar que en Orrego (2011) se muestra que los resultados presentados en una economía de intercambio puro se mantienen cuando se reemplaza el supuesto de que la oferta neta de la tierra es fija con el supuesto de que el capital es acumulable, siempre que se introduzcan costos de ajuste convexos de capital. En presencia de rigideces en el ajuste del capital, cualquier cambio en la demanda de activos se traduce en movimientos en los precios de los activos en lugar de cambios en la cantidad de capital (véase Glover y otros, 2011). Sin costos de ajuste de capital, el ahorro puede ser canalizado hacia los cambios en el acervo de capital, amortiguando las variaciones cíclicas en los precios y las tasas de interés.

CUADRO 3. Pirámides aumentadas

| Edad | Pirámides | | | |
|---------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| | $\tilde{\Delta}_1$ | $\tilde{\Delta}_2$ | $\tilde{\Delta}_3$ | $\tilde{\Delta}_4$ |
| 0 - 10 | n_3 | n_4 | n_1 | n_2 |
| 10 - 20 | n_2 | n_3 | n_4 | n_1 |
| 20 - 30 | n_1 | n_2 | n_3 | n_4 |
| 30 - 40 | n_4 | n_1 | n_2 | n_3 |
| 40 - 50 | n_3 | n_4 | n_1 | n_2 |
| 50 - 60 | n_2 | n_3 | n_4 | n_1 |
| 60 - 70 | n_1 | n_2 | n_3 | n_4 |
| 70 - 80 | n_4 | n_1 | n_2 | n_3 |

automática. La nueva estructura demográfica se muestra en el Cuadro 3. En cada pirámide aumentada, $\tilde{\Delta}_p$, el número de niños por padre está dada por $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (n_3/n_1, n_4/n_2, n_4/n_2, n_2/n_4)$.

Siguiendo a Brooks (2002), en esta sección se calcula la utilidad de los padres jóvenes altruistas que ingresan a la economía en la pirámide $\tilde{\Delta}_p$ y proveen consumo a sus hijos $c_{-1,p}$ y $c_{0,p}$ en el primer y segundo periodo de la vida, respectivamente, ya que los niños no toman ninguna decisión económica. En particular, se estudia el caso de los padres altruistas cuyas preferencias muestran hábitos de consumo, en línea con Malmendier y Nagel (2010), quienes sostienen que las experiencias a edad temprana podrían ser particularmente formativas y tener una influencia relativamente fuerte en las decisiones del individuo de hoy. En presencia de hábitos (o persistencia de consumo), los padres jóvenes pueden ahorrar más en las primeras etapas de la vida con el fin de mantener los niveles iniciales de consumo y los niveles de hábitos.

Ahora las preferencias sobre los flujos de consumo de por vida son representados por la siguiente suma de utilidades descontada

$$U_p^{\text{hab}} = \lambda v_p^{1-\varepsilon} [u(c_{-1,p}) + \delta u(c_{0,p})] + \sum_{k=1}^6 \delta^{k-1} u(c_{k,p} - \rho s_{k,p}), \quad (9)$$

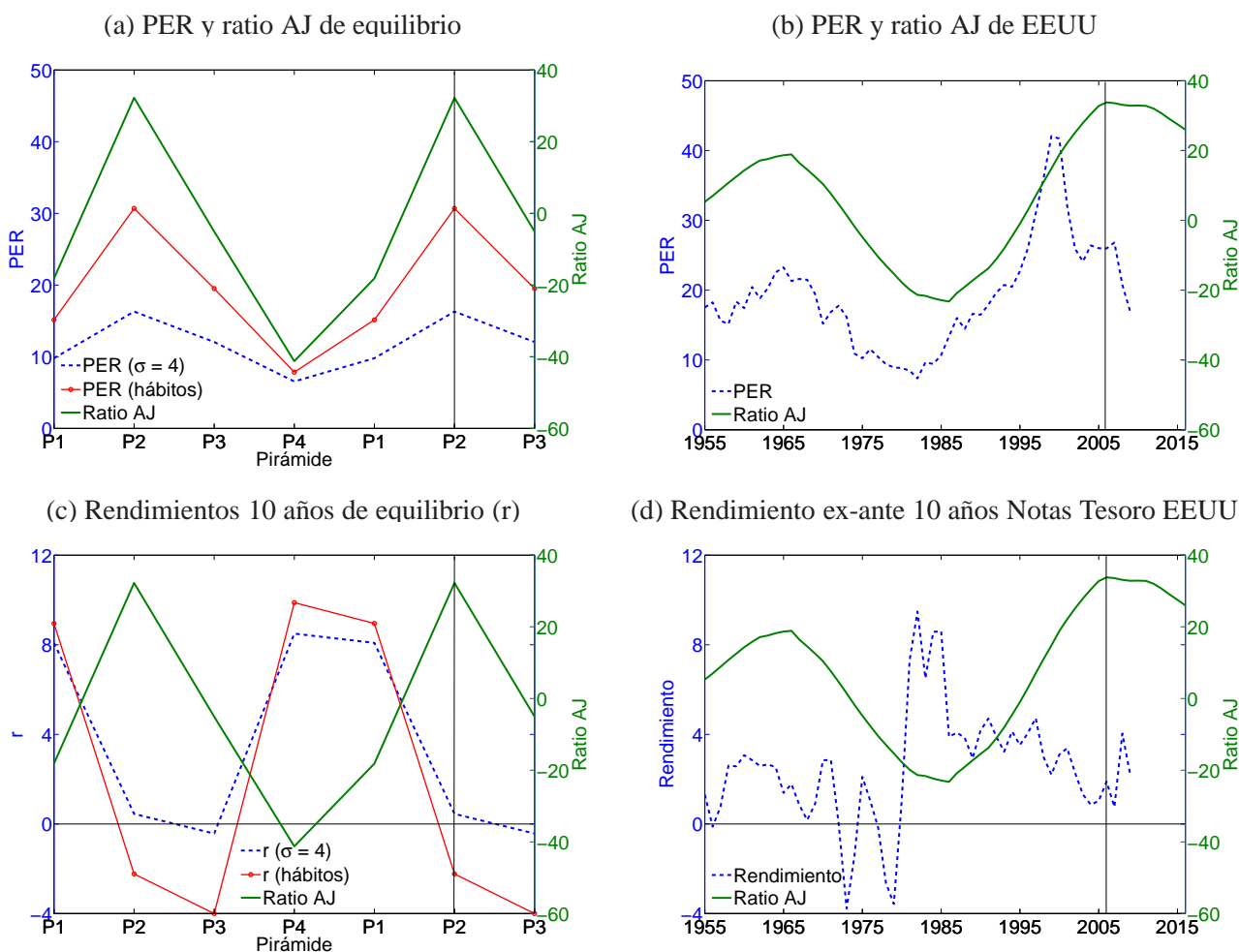
donde $s_{k,p} = (1-\theta)s_{k-1,p} + \theta c_{k-1,p}$ cuando $k > 1$ o cero de otro modo. La ponderación asignada a la utilidad de los niños está dado por $\lambda v_p^{1-\varepsilon} > 0$, donde λ es un parámetro relacionado al consumo equivalente de niños y v_p es el número de hijos (obviamente, si $\lambda = 0$, entonces los padres no son altruistas). Además, $c_{k,p}$ denota el consumo en la k -ésima etapa de la vida de un padre joven en la pirámide $\tilde{\Delta}_p$ y δ es el factor de descuento intertemporal. Finalmente, ρ captura el saldo de hábitos y θ mide su persistencia.

La restricción presupuestaria de los padres jóvenes en una economía de intercambio puro ahora se lee

$$c_{1,p} + q_p c_{2,p} + q_p q_{p+1} c_{3,p} + q_p q_{p+1} q_{p+2} c_{4,p} + q_p q_{p+1} q_{p+2} q_{p+3} c_{5,p} + q_p q_{p+1} q_{p+2} q_{p+3} q_p c_{6,p} = \\ - (v_p c_{-1,p} + v_p q_p c_{0,p}) + \omega_1 + q_p \omega_2 + q_p q_{p+1} \omega_3 + q_p q_{p+1} q_{p+2} \omega_4,$$

y las condiciones de limpieza de mercados se escriben ahora como

$$\begin{aligned} n_1(z_{1,1} + v_1 c_{-1,1}) + n_4(z_{2,4} + v_4 c_{0,4}) + n_3 z_{3,3} + n_2 z_{4,2} + n_1 z_{5,1} + n_4 z_{6,4} - d &= 0 \\ n_2(z_{1,2} + v_2 c_{-1,2}) + n_1(z_{2,1} + v_1 c_{0,1}) + n_4 z_{3,4} + n_3 z_{4,3} + n_2 z_{5,2} + n_1 z_{6,1} - d &= 0 \\ n_3(z_{1,3} + v_3 c_{-1,3}) + n_2(z_{2,2} + v_2 c_{0,2}) + n_1 z_{3,1} + n_4 z_{4,4} + n_3 z_{5,3} + n_2 z_{6,2} - d &= 0 \\ n_4(z_{1,4} + v_4 c_{-1,4}) + n_3(z_{2,3} + v_3 c_{0,3}) + n_2 z_{3,2} + n_1 z_{4,1} + n_4 z_{5,4} + n_3 z_{6,3} - d &= 0. \end{aligned}$$

GRÁFICO 5. Predicciones del modelo con hábitos y evidencia para EEUU (1955 - 2016)

FUENTE: Gráfico 2 y cálculos propios.

De acuerdo con Brooks (2002) y Geanakoplos y otros (2004), se considera $\varepsilon = 0.5$ y $\lambda = 0.06$, respectivamente. Los valores de v_p son determinados por el tamaño de la cohorte considerada en la sección anterior, es decir, $(v_1, v_2, v_3, v_4) = (1.41, 1.58, 0.70, 0.64)$. Estas cifras sugieren que los padres en las cohortes pequeñas tienen más hijos que los de cohortes grandes, que ha sido históricamente el caso en los EEUU durante el siglo XX.¹¹

Los parámetros asociados a los hábitos de consumo son calibrados tal que $(\rho, \theta) = (0.50, 0.95)$. Estas cifras no sólo sugieren que la utilidad instantánea de los padres jóvenes está altamente conectada al consumo pasado y actual, sino también que el efecto de los saldos de hábitos es pequeño.¹²

La introducción de altruismo y hábitos ayuda a mejorar las predicciones cuantitativas del modelo original como se aprecia en el Gráfico 5. Debido a que la complementariedad de los bienes en diferentes periodos aumenta, ahora son necesarias grandes oscilaciones en el precio de las acciones para equilibrar

¹¹ La explicación económica estándar de este resultado puede encontrarse en Macunovich y Easterlin (2008). Básicamente, se argumenta que los adultos en grandes generaciones prevén un deterioro de sus condiciones de vida en relación a la de sus padres (que pertenecen a las generaciones pequeñas), y por lo tanto tienen menos hijos como un intento de mantener el *status quo* en términos de aspiraciones materiales.

¹² Existe una amplia gama de valores para ρ en la literatura que va de 0.174 (Kocherlakota, 1996) hasta 0.87 (Campbell y Cochrane, 1999).

el mercado de bienes. En el panel (a) se muestra el PER obtenido del modelo y en el panel (c), la tasa de interés real de equilibrio a 10 años anualizada. En ambos casos, la línea discontinua de puntos corresponde a la economía de intercambio puro (con $\sigma = 4$), mientras que la línea de puntos corresponde a la economía de intercambio puro con altruismo y persistencia de hábitos. Como es habitual, la línea continua corresponde a la proporción AJ de la sección 3 expresada en desviaciones porcentuales con respecto a la media. Por último, los paneles (b) y (d) son los mismos que en el Gráfico 4, es decir, incluyen las proyecciones de población hasta el año 2016.

Ahora es posible caracterizar más detalladamente el comportamiento del PER. El panel (a) del Gráfico 5 puede ser interpretado de la siguiente manera. En la pirámide 2 (y la pirámide 3, en menor medida), los agentes de entre 40 y 60 años de edad demandan más acciones, en relación con el caso sin hábitos y por lo tanto existe un fuerte impacto en el precio de las acciones y el PER. En la pirámide 4 (y la pirámide 1, en menor medida) el efecto en el PER es más débil, porque los agentes de entre 40 y 60 años de edad no aumentan fuertemente la demanda de acciones, ya que pertenecen a cohortes pequeñas y por lo tanto se enfrentan a términos de intercambio más favorables. Las tasas de interés en el panel (c) del Gráfico 5 se mueven en consecuencia para evitar las oportunidades de arbitraje.¹³

5 EVIDENCIA INTERNACIONAL

Henriksen (2002) muestra que existen diferencias entre los patrones demográficos de Japón y los EEUU en los últimos treinta años. Debido a las menores tasas de fecundidad, mortalidad e inmigración, la población japonesa ha estado envejeciendo más rápidamente que la población de EE.UU. En las últimas tres décadas del siglo XX, la proporción de la población mayor de 65 años en Japón aumentó de 7.1 a 17.2 por ciento, mientras que en los EEUU ésta ha aumentado de 9.8 a 12.5 por ciento. En esta sección se contrastan las predicciones cualitativas del modelo con datos de Japón.

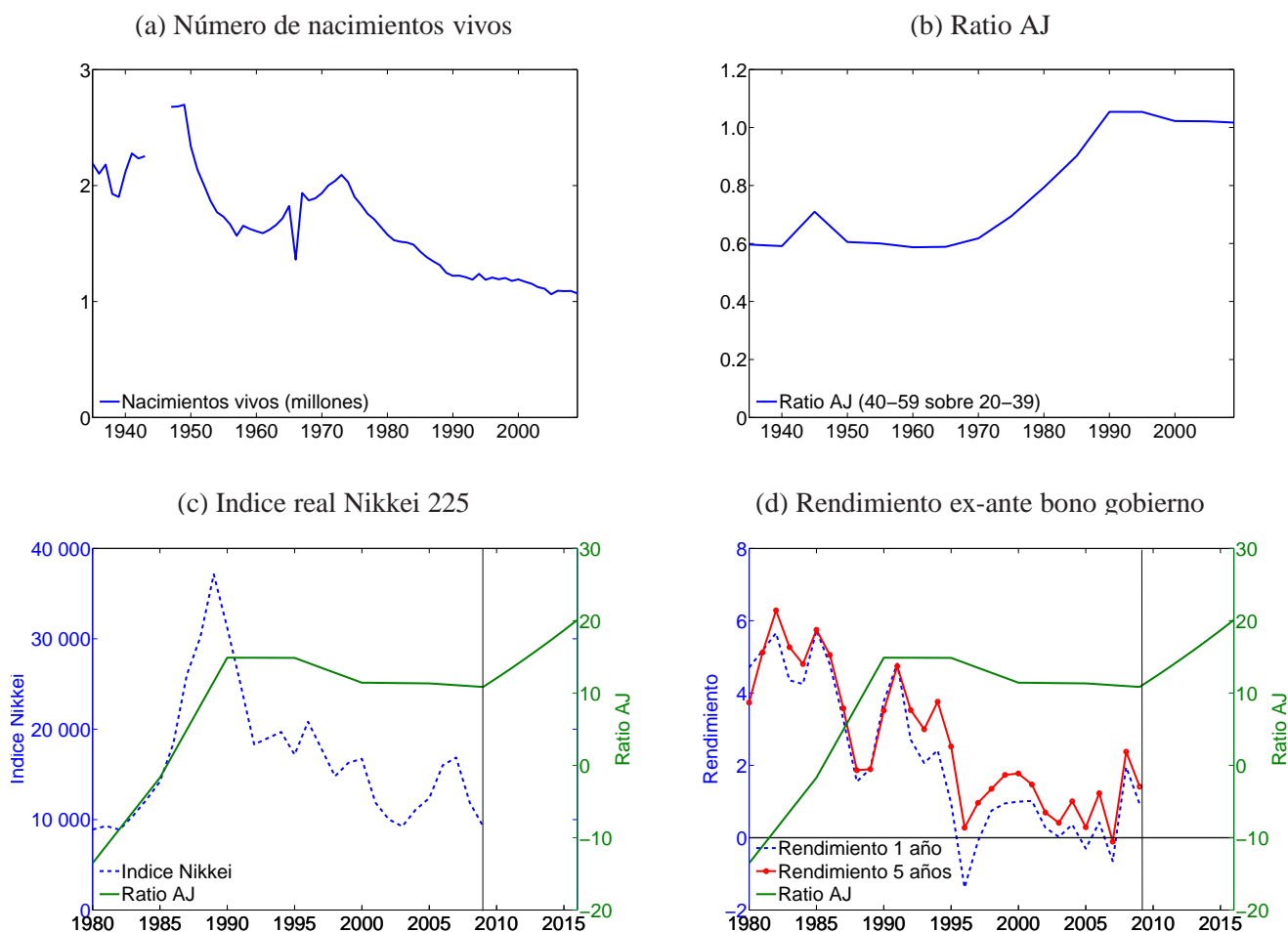
En el panel (a) del Gráfico 6 (p. 99) se muestra el número de nacimientos vivos desde 1935 hasta 2009, y en el panel (b) se muestra el ratio AJ (teniendo en cuenta la proporción de personas entre 40-59 años de edad respecto de las personas entre 20-39 años de edad). Según el panel (a) hay posiblemente dos periodos de auge de nacimientos en Japón en este horizonte de tiempo. El primero ocurre después de la Segunda Guerra Mundial y el segundo se produce en la década de 1970. Ambos acontecimientos han influido sin duda en la evolución de la proporción AJ, cuya pendiente se hace más pronunciada en la década de 1970 (ver panel (b) del Gráfico 6). En la década de 1990 el ratio AJ disminuye ligeramente, ya que la participación del número de jóvenes en la composición de la pirámide poblacional de Japón no ha sido lo suficientemente importante. Debido a que este trabajo estudia los efectos del comportamiento cíclico del ratio AJ sobre variables macrofinancieras, la atención se restringirá al periodo desde fines de la década de 1970.

Por su parte, en el panel (c) del Gráfico 6 se muestra el índice Nikkei expresado en yenes de 2010. En el panel (d) se muestran los rendimientos reales ex-ante anualizados de la deuda pública a 1 año y 5 años. En ambos paneles se incluye la trayectoria histórica del ratio AJ, en desviaciones porcentuales respecto a la media, que incluye las proyecciones de población hasta el año 2016 y por lo tanto extiende aquella contenida en los paneles (a) y (c).

Podría decirse que las predicciones del modelo estudiado en las secciones anteriores acerca del comportamiento de los precios de las acciones y las tasas de interés están en línea con los datos de Japón, al menos cualitativamente. El índice Nikkei se mueve sincronizadamente con el ratio AJ, y las tasas de interés reales se mueven para prevenir las oportunidades de arbitraje (las tasas de interés son altas cuando

¹³ Para un mayor detalle sobre la relación entre altruismo, hábitos de consumo y precios de activos, ver Orrego (2011).

GRÁFICO 6. El caso de Japón



NOTAS: (a) y (b) La información abarca desde 1935 hasta 2009; (c) y (d) La información abarca desde 1980 hasta 2016.

FUENTES: (a) y (b) Oficina de Estadísticas y Ministerio de Asuntos Internos y Comunicaciones de Japón; (c) y (d) Varios Ministerios de Japón y Banco Central Europeo.

se espera que el índice real Nikkei aumente, y viceversa). Y, si uno cree en el equilibrio cíclico descrito en este documento y tiene en cuenta las previsiones demográficas de las agencias japonesas (expuestas a partir de las líneas verticales en los paneles (c) y (d) del Gráfico 6), entonces el modelo predice un aumento del índice Nikkei y altas tasas de interés en los cinco años siguientes.

6 OBSERVACIONES FINALES

Este artículo presenta un modelo de equilibrio determinístico cuyas predicciones sobre los precios de los activos coinciden cualitativamente con las tendencias del PER y las tasas de interés real durante la posguerra de EEUU. A diferencia de Geanakoplos y otros (2004), este modelo no predice que los precios de las acciones deberían moverse de forma inversa con las tasas de interés real, al menos desde una perspectiva de largo plazo. Por el contrario, se muestra que en un equilibrio cíclico estacionario hay movimientos independientes en los precios de las acciones y bonos, que son necesarios para evitar oportunidades de arbitraje.

La versión básica del modelo con intercambio puro explica el impacto del cambio demográfico en las tasas de interés y el PER. La introducción de producción no altera significativamente las predicciones

originales, siempre que los costos convexos de ajuste de capital estén permitidos. Si nos atenemos a la idea de que un equilibrio cíclico es originado por factores demográficos, entonces el modelo predice para los EEUU una disminución del PER y las tasas de interés reales en los próximos cinco años. Los resultados cualitativos están también en línea con los datos japoneses de las últimas décadas.

Siguiendo a Brooks (2002) y Malmendier y Nagel (2010), se estudia también el caso en que los padres son altruistas y desarrollan hábitos de consumo. Esta versión del modelo tiene mejores resultados cuantitativos que el modelo con efectos demográficos puros. Los hábitos aumentan la aversión a la variabilidad del consumo, y por lo tanto el modelo requiere de un mayor equilibrio de los movimientos en precios para equilibrar los mercados de bienes. El hecho de que algunas generaciones tienen más suerte que otras completa la historia, ya que los precios se mueven en la magnitud y dirección deseada.¹⁴

Es conveniente terminar esta sección con algunas salvedades. Primero, el modelo presentado en este documento supone una economía cerrada y por lo tanto la cuenta corriente no juega ningún papel en la determinación de los precios de los activos. Segundo, se ignora el papel de la inmigración, ya que Geanakoplos y otros (2004) sostienen que la inmigración en los EEUU en el último siglo no ha cambiado dramáticamente la composición del ratio AJ. Tercero, no es posible rastrear la composición del portafolio de activos de los consumidores en diferentes periodos de la vida, porque el ambiente es determinístico. Este modelo también es incapaz de explicar las tasas de ahorro agregado en los EEUU (al menos en la versión de cambio puro del modelo, el ahorro agregado es constante en el tiempo). El modelo no puede evaluar tampoco si los estadounidenses están ahorrando óptimamente para la jubilación. En realidad, este punto está más allá del alcance del documento.

Sin embargo, sería interesante estudiar si es posible captar la relación entre los precios de la vivienda y los cambios de baja frecuencia en la composición por edades de la población de los EEUU. Por ejemplo, ¿el ratio AJ y el índice Standard & Poor's Case-Shiller se mueven juntos? Se deja esta pregunta para una futura investigación.

REFERENCIAS

- Abel, A. (1990), "Asset prices under habit formation and catching up with the Joneses", *American Economic Review*, 80(2), 38-42.
- Azariadis, C. y R. Guesnerie (1986), "Sunspots and cycles", *Review of Economic Studies*, 53(5), 725-737.
- Balasko, Y., D. Cass y K. Shell (1980), "Existence of competitive equilibrium in a general overlapping generations model", *Journal of Economic Theory*, 23(3), 307-322.
- Barsky, R. (1989), "Why don't prices of stocks and bonds move together?", *American Economic Review*, 79(5), 1132-1145.
- Brooks, R. (2002), "Asset-market effects of the baby boom and social security reform", *American Economic Review*, 92(2), 402-406.
- Campbell, J. y J. Cochrane (1999), "By force of habit: A consumption-based explanation of aggregate stock market behavior", *Journal of Political Economy*, 107(2), 205-51.

¹⁴ No es posible obtener las mismas predicciones mediante la reducción de la elasticidad de sustitución en el modelo establecido en la sección 4. Por ejemplo, cuando la elasticidad de sustitución es tan baja como 0.13 (o equivalentemente, $\sigma = 8$), el modelo con efectos demográficos puros predice que (i) las tasas de interés reales debería variar entre -2.8 y 12.7, y (ii) el PER más bajo debería ser del orden de 4.5, y el más alto debe ser 21.4. Así, los ingredientes introducidos en la sección 5 son más apropiados para alterar la elasticidad de sustitución intergeneracionalmente y así mejorar los resultados.

- Fair, R. y K. Dominguez (1991), "Effects of changing U.S. age distribution on macroeconomic equations", *American Economic Review*, 81(5), 1276-1294.
- Geanakoplos, J. (2005), "The ideal inflation indexed bond and Irving Fisher's theory of interest with overlapping generations", *American Journal of Economics and Sociology*, 64(1), 257-305.
- Geanakoplos, J. (2008), "Overlapping generations model of general equilibrium", in *The New Palgrave Dictionary of Economics*, Eds. Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume, Palgrave MacMillan.
- Geanakoplos, J., M. Magill y M. Quinzii (2004), "Demography and the long-run predictability of the stock market", *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, 241-307.
- Glover, A., J. Heathcote, D. Krueger y J. Rios-Rull (2011), "Intergenerational redistribution in the great recession", edición mimeografiada, University of Pennsylvania.
- Goenka, A., D. Kelly y S. Spear (1998), "Endogenous strategic business cycle", *Journal of Economic Theory*, 81(1), 97-125.
- Grandmont, J. (1985), "On endogenous competitive business cycles", *Econometrica*, 55(5), 995-1045.
- Henriksen, E. (2002), "A demographic explanation of U.S. and Japanese current account behavior", edición mimeografiada, Carnegie Mellon University.
- Higgins, M. y J. Williamson (1997), "Age structure dynamics in Asia and dependence on foreign capital", *Population and Development Review*, 23(2), 261-293.
- Jaimovich, N. y H. Siu (2009), "The young, the old and the restless: Demographics and business cycle volatility", *American Economic Review*, 99(3), 804-826.
- Kehoe, T., D. Levine, A. Mas-Colell y M. Woodford (1991), "Gross substitutability in large-square economies", *Journal of Economic Theory*, 54(1), 1-25.
- Kocherlakota, N. (1996), "The equity premium: It's still a puzzle," *Journal of Economic Literature*, 34(1), 42-71.
- Kubler, F. y K. Schmedders (2010), "Competitive equilibria in semi-algebraic economies", *Journal of Economic Theory*, 145(1), 301-330.
- Malmendier, U. y S. Nagel (2010), "Depression babies: Do macroeconomic experiences affect risk-taking?", *Quarterly Journal of Economics*, 126(1), 373-416.
- Macunovich, D. y R. Easterlin (2008), "Easterlin hypothesis", in *The New Palgrave Dictionary of Economics*, Second Edition. Eds. S. Durlauf and L. Blume. Palgrave Macmillan.
- Modigliani, F. y R. Brumberg (1954), "Utility analysis and the consumption function: An interpretation of cross section data", in K. K. Kurihana ed., *Post Keynesian Economics*, New Brunswick, NJ: Rutgers University Press, 388-436.
- Orrego, F. (2011), "Essays on overlapping generations economies", Tesis doctoral no publicada, Carnegie Mellon University.
- Poterba, J. (2001), "Demographic structure and asset returns", *Review of Economic and Statistics*, 83(4), 565-584.
- Poterba, J. (2004), "The impact of population aging on financial markets", NBER Working Paper 10851.