



BANCO CENTRAL DE RESERVA DEL PERÚ

Un Indicador Líder de Actividad Real para el Perú

Fernando Pérez¹, Omar Ghurra² y Rodrigo Grandez³

^{1, 2, 3} Banco Central de Reserva del Perú

DT. N° 2017-001
Serie de Documentos de Trabajo
Working Paper series
Enero 2017

Los puntos de vista expresados en este documento de trabajo corresponden a los autores y no reflejan necesariamente la posición del Banco Central de Reserva del Perú.

The views expressed in this paper are those of the authors and do not reflect necessarily the position of the Central Reserve Bank of Peru.

Un Indicador Líder de Actividad Real para el Perú*

Fernando J. Pérez Forero[†] Omar J. Ghurra Aguilar[‡]
Rodrigo F. Grandez Vargas[§]

Diciembre 2016

Resumen

Dado el rezago en que se publican las cifras del crecimiento del PBI, es importante contar con indicadores líderes de la actividad económica que permitan conocer en tiempo real la evolución de la misma. Esto facilita la toma de decisiones de política económica. Por ello, en el presente trabajo, construimos un indicador líder de la actividad económica peruana siguiendo la metodología de [Aruoba et al. \(2009\)](#). Este indicador es extraído como un componente no observable que explica el co-movimiento de seis variables: producción de electricidad, consumo interno de cemento, IGV interno ajustado, ventas de pollo, producción minero-metálica y PBI real. La principal ventaja de este indicador está en que puede actualizarse con un rezago menor a una semana respecto al mes de interés, dada la naturaleza de las variables que lo componen. Los resultados muestran una correlación positiva de nuestro indicador con el PBI real en alrededor de 85%, lo que permite realizar el *nowcasting* del crecimiento con un alto nivel de precisión.

Palabras clave: Indicador líder, actividad económica, PBI.

Clasificación JEL: C32, E32.

*Los autores agradecen los comentarios de los participantes en el Seminario de Investigación del BCRP y del XXXIV Encuentro de Economistas del BCRP. Las opiniones vertidas en este documento son de estricta responsabilidad de los autores y no necesariamente representan la opinión del BCRP.

[†]Jefe del Departamento del Programa Monetario, Banco Central de Reserva del Perú.
E-mail: fernando.perez@bcrp.gob.pe

[‡]Especialista del Departamento de Análisis de Coyuntura, Banco Central de Reserva del Perú.
E-mail: omar.ghurra@bcrp.gob.pe

[§]Especialista del Departamento de Análisis de Coyuntura, Banco Central de Reserva del Perú.
E-mail: rodrigo.grandez@bcrp.gob.pe

1 Introducción

La medición de la actividad económica, entre otras formas a través del PBI, es de suma importancia para los agentes económicos privados (consumidores e inversionistas) y para las autoridades de política. Al conocer el estado actual de la economía, estos agentes pueden tomar decisiones óptimas de consumo-inversión y ejecutar políticas económicas adecuadas que le permitan a sus países seguir una trayectoria óptima de crecimiento, respectivamente.

En Perú, la institución oficial encargada de informar sobre la evolución del PBI es el Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI). Estas cifras se presentan con un rezago de cuarenta y cinco días y la frecuencia de su publicación es de carácter mensual. Para poder tomar decisiones de forma oportuna se requieren indicadores líderes (adelantados) que permitan conocer en tiempo real la evolución de la actividad económica.

En el presente trabajo se busca construir un indicador líder de frecuencia mensual que refleje la evolución de la actividad económica real de Perú (medido a través del PBI). Basados en el trabajo de [Kumar \(2013\)](#), el indicador es extraído como un factor común no observado que se deriva del movimiento de un conjunto de seis variables reales macroeconómicas publicadas en distintas semanas del mes. Cabe señalar que el trabajo de [Kumar \(2013\)](#), a su vez, sigue al de [Aruoba et al. \(2009\)](#).

La metodología para construir el indicador es flexible a la naturaleza de los datos del Perú y permite actualizarse en tiempo real cuando los datos son publicados. La principal ventaja es que la mayor parte de las variables que componen nuestro indicador se publican con un rezago menor a una semana en relación al mes de interés. La metodología mencionada utiliza el filtro de Kalman y estima los parámetros del modelo mediante herramientas clásicas y bayesianas. En ese sentido, dado que se cuenta con libre acceso a todas las variables que este nuestro indicador, es pertinente explorar las mismas con el fin de mejorar las mediciones y proyecciones de la actividad económica.

Asimismo, dado que el indicador es capaz de incorporar los datos más recientes disponibles de variables macroeconómicas, éste se puede emplear en la predicción inmediata y proyección de otras variables de interés tales como el PBI. Así, el indicador mencionado servirá como base para el análisis de la situación actual del ciclo económico. La literatura sobre indicadores líderes es amplia y, por lo general, no existe una única metodología para la construcción de los mismos. En particular, para el caso peruano existen diversos trabajos en relación a indicadores líderes de la actividad económica. **Escobal y Torres (2002)** construyen un indicador líder compuesto (ILC) en base a catorce variables que en conjunto pueden permitir una predicción del PBI con una anticipación de hasta seis meses. **Kapsoli y Bencich (2004)**, por su parte, utilizan un modelo no lineal de redes neuronales para construir un indicador líder a partir de doce variables líderes que se adelantan al PBI.

Por su parte, **Ochoa y Lladó (2003)** elaboraron dos tipos de indicadores líderes para el periodo 1992-2001: uno para predecir la evolución de la trayectoria del ciclo de la economía peruana siguiendo la metodología de **Auerbach (1982)**- y otro para identificar tempranamente los turning points del ciclo de la misma economía siguiendo la metodología de The Conference Board. **Etter y Graff (2011)** proponen un indicador adelantado en base a la encuesta de expectativas realizada por el Banco Central de Reserva del Perú (BCRP). Finalmente, **Martínez y Quineche (2014)** proponen un indicador con una sola variable (electricidad), el cual permite realizar el *nowcasting* del crecimiento del PBI del mes con una sola semana de información del mes en curso.

La búsqueda de indicadores líderes no solo se remonta a Perú, sino que también ha sido objeto de interés por diversos Bancos Centrales y Organismos Internacionales. Por ejemplo, la Reserva Federal de Philadelphia actualiza periódicamente un indicador líder de la actividad económica Norteamericana¹. Asimismo, el Banco Central de Italia actualiza periódicamente un indicador líder de la actividad económica de la Eurozona (índice Euro-Coin)² en base al trabajo

¹Ver <https://www.philadelphiafed.org/research-and-data/real-time-center/business-conditions-index>

²Ver <http://eurocoin.cepr.org/>

de [Altissimo et al. \(2010\)](#).

Nuestras estimaciones brindan resultados interesantes. Principalmente, nuestro indicador es capaz de capturar los principales puntos de quiebre del crecimiento anual del PBI y guarda una correlación mayor al 85 % con el mismo. En especial, dada la naturaleza de nuestro modelo y de las variables que utilizamos, es posible estimar dicho indicador con cuarenta y cinco días de adelanto respecto a la publicación de la tasa de crecimiento del PBI.

El presente trabajo sigue la siguiente estructura: en la sección [2](#) hacemos una descripción de la base de datos que estamos utilizando para construir nuestro indicador líder. En la sección [3](#) discutimos la metodología utilizada y presentamos nuestra estrategia empírica. En la sección [4](#) presentamos nuestros resultados principales y, finalmente, en la sección [6](#) exponemos nuestras conclusiones.

2 Descripción de los datos

Para la elaboración de nuestro indicador líder hemos seleccionado en 5 variables asociadas estrechamente a la actividad económica peruana: (1) PBI real, (2) producción de electricidad, (3) consumo interno de cemento, (4) IGV interno ajustado, (5) ventas de pollo diarias y (6) producción minero-metálica. Todas las variables se publican con frecuencia mensual y provienen de distintas fuentes.

Para el PBI real (índice) utilizamos la información brindada por el INEI. La producción de electricidad (medida en GWh) es obtenida por el Comité de Operaciones del Sistema Interconectado Nacional (COES). El consumo interno de cemento (en miles de TM) es obtenido a través de diversas empresas que operan en dicho rubro. Para el IGV interno utilizamos la información brindada por la Superintendencia Nacional de Administración Tributaria (SUNAT), para las ventas de pollo diarias utilizamos la información brindada por el Ministerio de Agricultura (MINAGRI) y finalmente para la producción minera utilizamos datos proporcionado por

el Ministerio de Economía y Finanzas (MEF). En la tabla 1 se puede apreciar ver con mayor detalle la descripción de las seis variables, incluyendo el rezago en la publicación respecto al mes de referencia.

Cuadro 1. *Variables que componen el indicador líder*

Variable	Unidad de medición	Fuente	Rezago en publicarse
Producción de electricidad	GWh	COES	7
IGV interno (ajustado)	Millones de soles	SUNAT	7
Ventas de pollo	Miles de unidades diarias	MINAGRI	7
Consumo interno de cemento	Miles de TM	Empresas	7
Minería metálica	Índice (2007=100)	MINEM	30
PBI Real	Índice (2007=100)	INEI	45

Cabe mencionar que las variables son introducidas al modelo como tasas de crecimiento anual, tal como se puede apreciar en la figura 4. Asimismo, el horizonte temporal de este ejercicio empírico parte de enero de 2004 y termina en noviembre de 2016. De otro lado, la disponibilidad de datos no es uniforme, por lo que se tendrá un panel no balanceado. Como se explicará en la sección metodológica, esto no genera ningún tipo de dificultad a la hora de emprender la estimación del modelo.

3 Metodología

Para construir nuestro indicador de la actividad real peruana, basamos nuestra metodología en el trabajo [Aruoba et al. \(2009\)](#) y lo adaptamos a la naturaleza de los datos del Perú. Este indicador tiene características interesantes, tales como la capacidad de incorporar observaciones faltantes y la capacidad de actualizarse en tiempo real cuando los datos son publicados. Asimismo, el indicador se deriva de un modelo de factores dinámicos, el cual se obtiene mediante el uso del Filtro de Kalman.

3.1 Modelo Econométrico

Sea x_t un escalar que denota el estado no observable de la economía en el tiempo t , entonces la dinámica de x_t es dada por un proceso autorregresivo de orden dos:

$$x_t = \rho_1 x_{t-1} + \rho_2 x_{t-2} + e_t, \quad (1)$$

donde e_t es un choque transitorio y se distribuye como $N(0, 1)$. Por otro lado, se asumirá que la variable observada y_t^i puede ser escrita como:

$$y_t^i = c^i + \beta^i x_t + \xi_t^i, \quad (2)$$

donde ξ_t^i es un componente idiosincrático específico a la i -ésima serie y $\xi_t^i \sim N(0, \sigma_i)$. Además, la $\text{cov}(\xi_{t,t}^i) = 0$.

Como ya se ha mencionado, los indicadores de actividad utilizados son medidos generalmente en frecuencia mensual, los cuales cuentan con cierto rezago a la hora de publicarse. El propósito de este trabajo es entonces el de estimar la trayectoria del factor común x_t , teniendo como información las variables observadas y_t . Para el logro de dicho objetivo, será necesario re-escribir el modelo como un sistema de espacio de estados.

3.2 Representación de espacio de estados

La representación de espacio de estados correspondiente a las ecuaciones (1) y (2) puede ser escrita como

$$X_{t+1} = AX_t + F\mathbf{u}_{t+1}, \quad (3)$$

$$Z_t = C + DX_t + \mathbf{v}_t, \quad (4)$$

donde Z_t es un vector de variables observadas, X_t es un vector de variables estado, $\mathbf{u}_t \sim N(0, Q)$ es un vector de shocks de transición y $\mathbf{v}_t \sim N(0, \Sigma_{vv})$ es un vector de shocks idiosincráticos. Notar que Q es matriz identidad siguiendo el supuesto de identificación de la ecuación (1) y Σ_{vv} es una matriz diagonal siguiendo la ecuación (2). La representación de espacio de estados

completa para las dos últimas ecuaciones puede ser escrita como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ x_t \end{bmatrix}}_{X_{t+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \end{bmatrix}}_{X_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{F\mathbf{u}_{t+1}} e_{t+1},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_{1,t} \\ y_{2,t} \\ y_{3,t} \\ y_{4,t} \\ y_{5,t} \\ y_{6,t} \end{bmatrix}}_{Z_t} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix}}_C + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 \\ \beta_2 & 0 \\ \beta_3 & 0 \\ \beta_4 & 0 \\ \beta_5 & 0 \\ \beta_6 & 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} x_t \\ x_{t-1} \end{bmatrix}}_{X_t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_6 \end{bmatrix}}_{\Sigma_v} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_t}.$$

4 Estimación

Dado el modelo especificado, es necesario obtener los parámetros del mismo para calcular la trayectoria del factor x_t . Es por ello que se utiliza el Filtro de Kalman y el Kalman smoother (ver apéndice A y B, respectivamente) para extraer dicho estado común a partir de la representación de espacio de estados. Asimismo, este algoritmo mencionado sirve de base para la evaluación de la función de verosimilitud. Posteriormente, los parámetros del modelo son estimados en primer lugar via máxima verosimilitud y, posteriormente, utilizando métodos bayesianos.

4.1 La Función de Verosimilitud

Las proyecciones $X_{t|t-1}$ y $Z_{t|t-1} \equiv DX_{t|t-1}$ fueron obtenidas utilizando el filtro de kalman (ver apéndice A).³ En consecuencia, la distribución de la proyección es:

$$Z_{t|t-1} \sim N(C + DX_{t|t-1}, DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv})$$

³ Asimismo, si las innovaciones v_t, w_t, e_t y el estado inicial $X_{0|0}$ se distribuyen normalmente, las proyecciones $X_{t|t-1}$ y $Z_{t|t-1}$ son óptimas asumiendo una especificación lineal.

y la densidad es:

$$f(Z_{t|t-1}) = (2\pi)^{-n/2} \det(DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv})^{-1/2} \times \exp\left(\tilde{Z}'_t (DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv})^{-1} \tilde{Z}_t\right) \quad (5)$$

donde $\tilde{Z}_t \equiv Z_t - DX_{t|t-1}$, $n = \dim(Z_t)$ y $t = p + 1, \dots, T$. La función de log-verosimilitud $l(\theta | Z^T) = \ln(L(\theta | Z^T))$ es:

$$l(\theta | Z^T) = \sum_{t=p+1}^T \ln[f(Z_{t|t-1})] \quad (6)$$

que es igual a:

$$l(\theta | Z^T) = -\frac{(T-p)n}{2} \ln[2\pi] - \frac{(T-p)}{2} \ln[\det(DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv})] - \frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^T (Z_t - C - DX_{t|t-1})' (DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv})^{-1} (Z_t - C - DX_{t|t-1}) \quad (7)$$

Idealmente, la función $l(\theta | Z^T)$ se encuentra bien comportada, con lo que es posible hallar θ^* (un máximo global). Esto no necesariamente es fácil de conseguir, con lo cual se requiere de una rutina numérica de maximización robusta. En nuestro caso, utilizamos la rutina `csminwel.m` propuesta por Christopher Sims⁴.

Asimismo, es importante remarcar también que en cada instante t no necesariamente se dispone de la información de los 6 indicadores. Dado ello, seguimos la estrategia de [Aruoba et al. \(2009\)](#), en donde se utiliza una matriz de selección W_t , de forma tal que $Z_t^* = W_t Z_t$ es el vector de variables observables y W_t es una matriz que escoge las filas de Z_t que cuentan con datos disponibles.

4.2 Algoritmo de Random-Walk Metropolis Hastings

En esta sección explicamos brevemente la estrategia utilizada para simular la distribución posterior de los parámetros del sistema. En particular, no utilizamos priors, por lo que $\ln P(\theta) = 0$.

⁴<http://sims.princeton.edu/yftp/optimize/>

Asimismo, el número de simulaciones es de $S = 500,000$, donde se descartan las primeras 250,000 y donde se toma 1 de cada 25 de las restantes para reducir la autocorrelación. Con ello, se cuenta con 10,000 réplicas para relizar la inferencia. La estrategia sigue los siguientes pasos:

1. Fijar θ_0 , S y $s = 1$.
2. Simular $\theta^* \sim p_*(\theta^* | \theta_{s-1}) = N(\theta_{s-1}, c\Sigma)$, $c > 0 \Rightarrow p_*(\theta^* | \theta_{s-1}) = p_*(\theta_{s-1} | \theta^*)$

3. Calcular:

$$\alpha = \text{mín} \left\{ 1, \frac{L(\theta^* | Z^T) P(\theta^*)}{L(\theta_{s-1} | Z^T) P(\theta_{s-1})} \right\}$$

y tomar $z \sim U(0, 1)$. Luego:

$$\theta_s = \begin{cases} \theta^*, & z \leq \alpha \\ \theta_{s-1}, & z > \alpha \end{cases}$$

4. Si $s < S$, fijar $s = s + 1$ y volver al paso 2. De lo contrario, detenerse.

En particular, utilizamos $\theta_0 = \text{argmax}(l(\theta | Z^T))$, donde Σ es la matriz hessiana de dicha maximización⁵. De esta forma, dado $c > 0$ la tasa de aceptación del algoritmo es de alrededor de 25 %.

5 Resultados

Luego de realizar la estimación del modelo y examinar la distribución posterior de los parámetros, en donde se aprecia que la mayoría de indicadores son relevantes a excepción de las ventas de pollo (ver apéndice C), procedemos a calcular el valor suavizado de la trayectoria del componente no observable X_t (ver apéndice B). Por definición este factor x_t estará centrado en cero, dado que no cuenta con un intercepto en la ecuación de transición. En estricto, las tasas de crecimiento de los indicadores tales como PBI sí se encuentran en porcentajes, por lo que ello afecta a la magnitud de los coeficientes β . En vista de ello, el indicador líder resulta de la predicción del presente $y_{t|T}^{PBI} = c^{PBI} + \beta^{PBI} x_{t|T}$. Así, dada la simulación anterior es posible calcular el intervalo de confianza de dicha trayectoria y de la predicción del crecimiento del PBI.

⁵Se tomar 10 distintos puntos iniciales aleatoriamente, de forma tal que se escogió el máximo punto alcanzado.

En la figura 1 es posible apreciar dicha trayectoria.

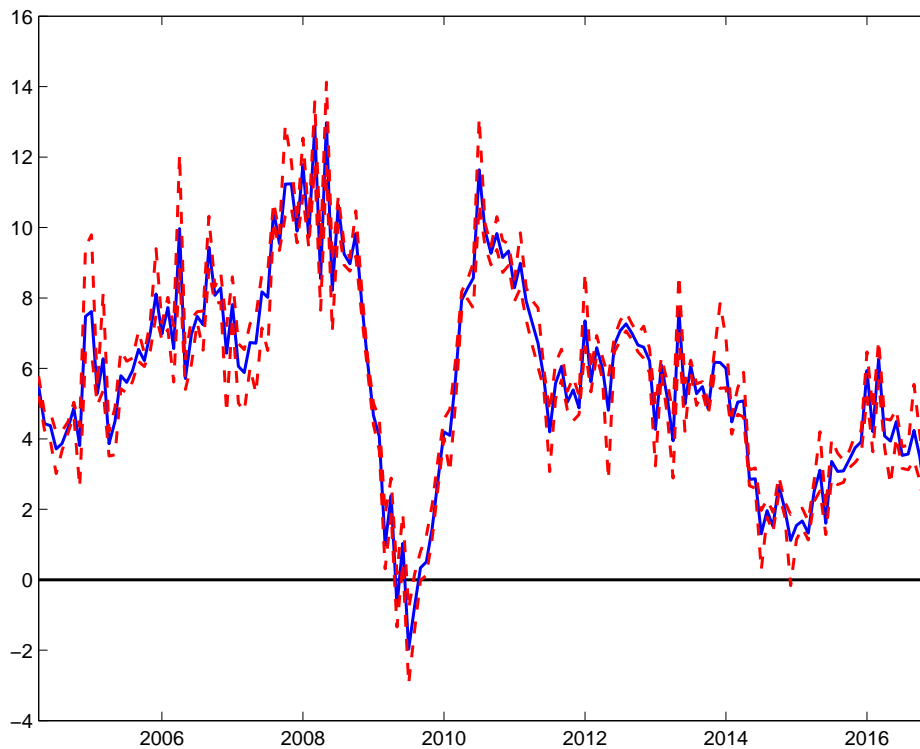


Figura 1. *Indicador Líder de actividad económica real para el Perú (2004-2016), valor mediano e intervalo del 95 % más probable*

Es importante remarcar que nuestro indicador es capaz de capturar los principales puntos de quiebre del crecimiento anual del PBI, tal como se observa en la figura 2, y cuya correlación es mayor al 85%. Dado ello, es posible realizar el *nowcasting* del crecimiento del PBI con bastante precisión.

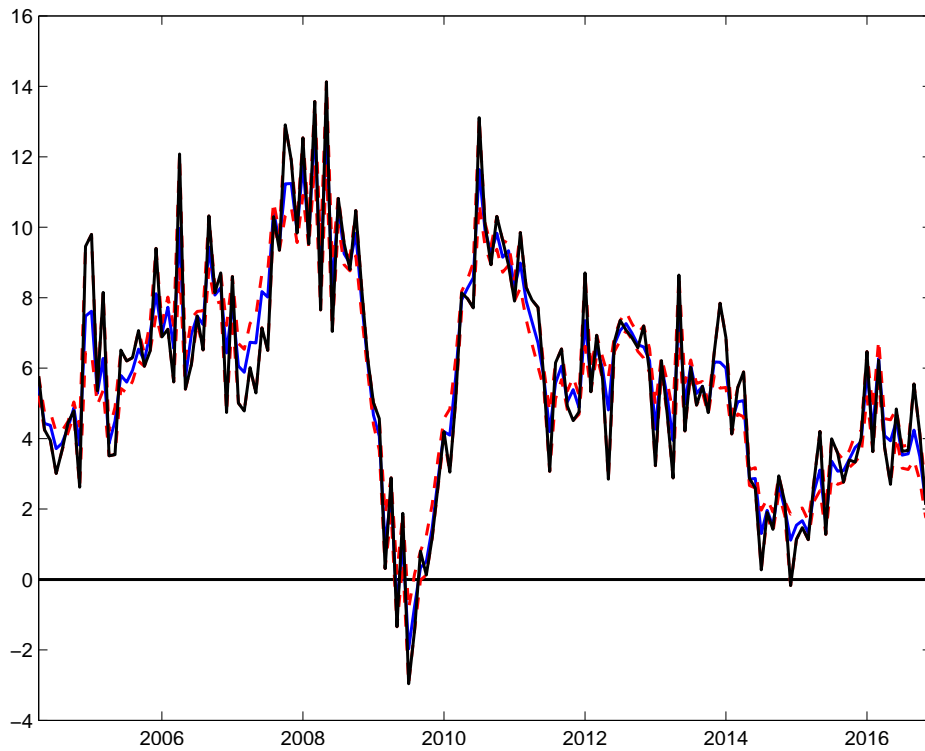


Figura 2. *Indicador Líder de actividad económica y Crecimiento del PBI*

6 Conclusiones

En este trabajo hemos construido un indicador adelantado de actividad económica real para el Perú basándonos en información relevante frecuentemente observada, así como también siguiendo la metodología de [Aruoba et al. \(2009\)](#). Asimismo, hemos extendido dicha metodología para tomar en cuenta la estimación bayesiana, de tal forma que sea posible cuantificar la incertidumbre de dicho indicador a lo largo de la muestra.

Es importante remarcar sobre nuestro indicador que es capaz de capturar los principales puntos de quiebre del crecimiento anual del PBI y que puede ser estimado de forma tal que es posible realizar el *nowcasting* del crecimiento del PBI con bastante precisión.

A El Filtro de Kalman⁶

El objetivo de este algoritmo es obtener la trayectoria del vector X_t condicional a los datos observados. Para ello procedemos de la siguiente manera: Al inicio del periodo t contamos con la estimación del periodo previo ($X_{t-1|t-1}$) y con la matriz de covarianzas ($P_{t-1|t-1}$). Asimismo, contamos con la ecuación (3) como información *a priori*, de modo tal que es posible realizar la predicción condicional a la información disponible en $t - 1$:

$$X_{t|t-1} = AX_{t-1|t-1}. \quad (8)$$

Definimos la matriz de covarianzas:

$$P_{t|t-1} \equiv E \left[(X_t - X_{t|t-1}) (X_t - X_{t|t-1})' \right].$$

$$P_{t|t-1} = E \left[(AX_{t-1} - AX_{t-1|t-1} - F\mathbf{u}_t) (AX_{t-1} - AX_{t-1|t-1} - F\mathbf{u}_t)' \right]$$

$$P_{t|t-1} = E \left[(A(X_{t-1} - X_{t-1|t-1}) - F\mathbf{u}_t) (A(X_{t-1} - X_{t-1|t-1}) - F\mathbf{u}_t)' \right]$$

Dado que \mathbf{u}_t is *i.i.d.*, se tiene que:

$$P_{t|t-1} = AE \left[(X_{t-1} - X_{t-1|t-1}) (X_{t-1} - X_{t-1|t-1})' \right] A' + FE [\mathbf{u}_t \mathbf{u}_t'] F'$$

que es igual a

$$P_{t|t-1} = AP_{t-1|t-1}A' + FF'. \quad (9)$$

Posteriormente, nueva información asociada a X_t es recibida en el periodo t bajo la forma de Z_t de acuerdo a la ecuación (4). Como resultado de ello, es posible actualizar la estimación de X_t combinando estas dos fuentes de información:

$$X_{t|t} = X_{t|t-1} + K_t (Z_t - C - DX_{t|t-1}). \quad (10)$$

⁶Ver: Hamilton (1994), Kim y Nelson (1999), Koop (2003), Robert y Casella (2004), y http://www.kris-nimark.net/pdf/Handout_S4.pdf

donde el término $Z_t - C - DX_{t|t-1} \equiv \tilde{Z}_t$ es la nueva información relevante y K_t es la ganancia de Kalman. Lo anterior se obtiene utilizando el teorema de la proyección, tal que

$$\begin{aligned}\langle X_t - K_t \tilde{Z}_t, \tilde{Z}_t \rangle &= 0 \\ E \left[(X_t - K_t \tilde{Z}_t) \tilde{Z}_t' \right] &= 0 \\ E \left[X_t \tilde{Z}_t' \right] - K_t E \left[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_t' \right] &= 0\end{aligned}$$

y como resultado se tiene que:

$$K_t = E \left[X_t \tilde{Z}_t' \right] \left(E \left[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_t' \right] \right)^{-1},$$

donde

$$\begin{aligned}E \left[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_t' \right] &= E \left[(Z_t - C - DX_{t|t-1}) (Z_t - C - DX_{t|t-1})' \right] \\ E \left[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_t' \right] &= E \left[(DX_t + \mathbf{v}_t - DX_{t|t-1}) (DX_t + \mathbf{v}_t - DX_{t|t-1})' \right] \\ E \left[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_t' \right] &= E \left[(D(X_t - X_{t|t-1}) + \mathbf{v}_t) (D(X_t - X_{t|t-1}) + \mathbf{v}_t)' \right] \\ E \left[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_t' \right] &= DE \left[(X_t - X_{t|t-1}) (X_t - X_{t|t-1})' \right] D' + \Sigma_{vv},\end{aligned}\tag{11}$$

por tanto,

$$K_t = P_{t|t-1} D' (DP_{t|t-1} D' + \Sigma_{vv})^{-1}.\tag{12}$$

Recordemos la ecuación (10):

$$X_{t|t} = X_{t|t-1} + K_t (Z_t - C - DX_{t|t-1}).$$

$$X_{t|t} - X_t = X_{t|t-1} - X_t + K_t (Z_t - C - DX_{t|t-1})$$

$$X_t - X_{t|t-1} = X_t - X_{t|t} + K_t (Z_t - C - DX_{t|t-1})$$

Tomamos varianzas a ambos lados de la ecuación, utilizando (11) y combinado con (12) resulta en:

$$P_{t|t-1} = P_{t|t} + K_t E \left[\tilde{Z}_t \tilde{Z}_t' \right] K_t'$$

y utilizando (11):

$$P_{t|t-1} = P_{t|t} + K_t (DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv}) K_t'$$

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t (DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv}) K_t'$$

y combinado con (12) resulta en

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}D' (DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv})^{-1} DP_{t|t-1}' \quad (13)$$

Asimismo, reemplazamos (13) en (9) expresada en $t + 1$:

$$P_{t+1|t} = A \left(P_{t|t-1} - P_{t|t-1}D' (DP_{t|t-1}D' + \Sigma_{vv})^{-1} DP_{t|t-1}' \right) A' + FF' \quad (14)$$

El filtro invariante dice que K_t y $P_{t|t-1}$ son constantes si los parámetros θ son constantes y al mismo tiempo la matriz de covarianzas inicial ($P_{1|0}$) es la solución a la ecuación (14), es decir:

$$vec(P_{1|0}) = (I - A \otimes A)^{-1} vec(FF').$$

Dado lo anterior, se asume implícitamente que el modelo propuesto es estacionario.

B Algoritmo Kalman Smoother

Es sabido que a través del filtro de Kalman es posible obtener la trayectoria del componente no observable X_t condicional a los datos observados Z_t y valores previos Z_{t-1} , es decir, $X_{t|t}$ y $X_{t|t-1}$. En esta sección mostramos que es posible inferir el valor de X_t para cada periodo t dada toda la muestra observada $Z^T = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_T\}$, es decir, $X_{t|T}$. Para lograr lo anterior, es necesario tomar en cuenta la ecuación de transición (3). Este procedimiento de smoothing se empieza con el último valor filtrado $X_{T|T}$, el cual ya se encuentra condicionado a toda la

muestra. Ahora consideremos la ecuación:

$$X_{t|T} = X_{t|t} + J_t (X_{t+1} - X_{t+1|t}) \quad (15)$$

lo que significa que el valor smoother $X_{t|T}$ es una función lineal del valor filtrado $X_{t|t}$ y la innovación en X del siguiente periodo $\tilde{X}_{t+1} \equiv (X_{t+1} - X_{t+1|t})$. Asumimos que estas dos innovaciones son ortogonales, de forma tal que es posible utilizar el teorema de la proyección:

$$\begin{aligned} \langle X_t - J_t \tilde{X}_{t+1}, \tilde{X}_{t+1} \rangle &= 0 \\ E \left[(X_t - J_t \tilde{X}_{t+1}) \tilde{X}'_{t+1} \right] &= 0 \\ E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] - J_t E \left[\tilde{X}_{t+1} \tilde{X}'_{t+1} \right] &= 0 \end{aligned}$$

y como resultado tendremos:

$$J_t = E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] \left(E \left[\tilde{X}_{t+1} \tilde{X}'_{t+1} \right] \right)^{-1}$$

donde

$$\begin{aligned} E \left[\tilde{X}_{t+1} \tilde{X}'_{t+1} \right] &= E \left[(X_{t+1} - X_{t+1|t}) (X_{t+1} - X_{t+1|t})' \right] \\ E \left[\tilde{X}_{t+1} \tilde{X}'_{t+1} \right] &= P_{t+1|t} \end{aligned} \quad (16)$$

Y de otro lado

$$\begin{aligned} E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] &= E \left[X_t (X_{t+1} - X_{t+1|t})' \right] \\ E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] &= E \left[X_t (AX_t + F\mathbf{u}_{t+1} - AX_{t|t})' \right] \\ E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] &= E \left[X_t (A(X_t - X_{t|t}) + F\mathbf{u}_{t+1})' \right] \\ E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] &= E \left[X_t (X_t - X_{t|t})' A' \right] + \underbrace{E \left[X_t \mathbf{u}'_{t+1} \right]}_{=0} F' \\ E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] &= E \left[(X_t - X_{t|t} + X_{t|t}) (X_t - X_{t|t})' A' \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] &= E \left[\underbrace{(X_t - X_{t|t}) (X_t - X_{t|t})'}_{=P_{t|t}} \right] A' + E \left[\underbrace{X_{t|t} (X_t - X_{t|t})'}_{=0} \right] A' \\
E \left[X_t \tilde{X}'_{t+1} \right] &= P_{t|t} A'
\end{aligned} \tag{17}$$

En consecuencia, de (16) y (17) obtenemos

$$J_t = P_{t|t} A' P_{t+1|t}^{-1} \tag{18}$$

C Parámetros estimados

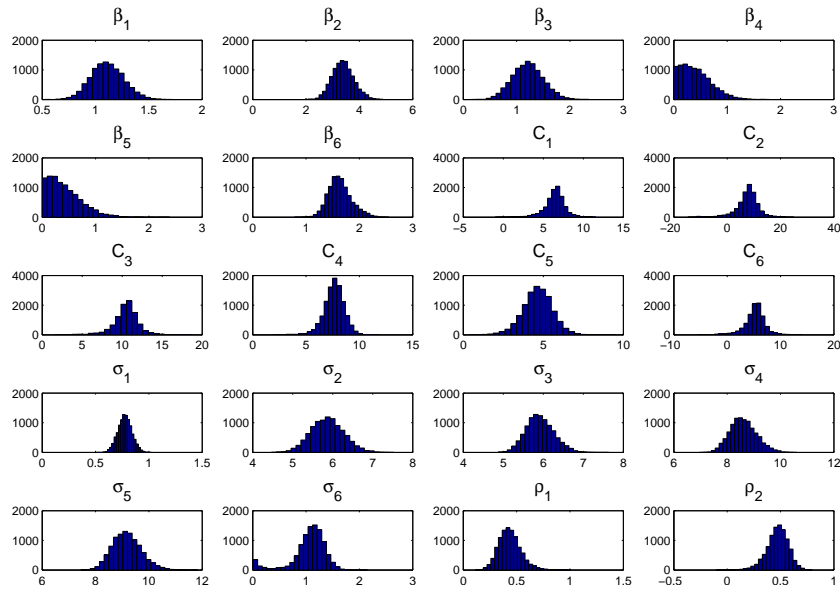


Figura 3. Distribución Posterior de parámetros

D Datos utilizados

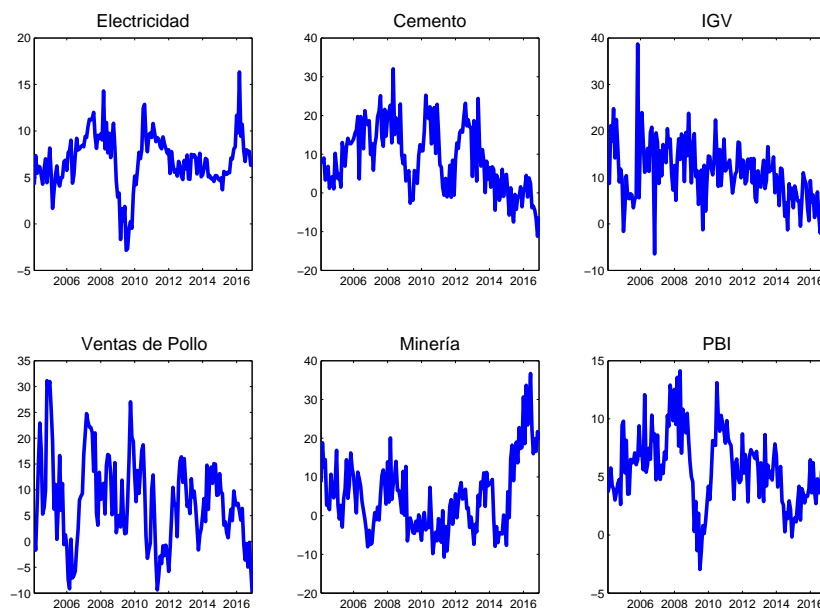


Figura 4. Datos utilizados

Referencias

- Altissimo, F., R. Cristadoro, M. Forni, M. Lippi y G. Veronese (2010), ‘New eurocoin: tracking economic growth in real time’, *The review of economics and statistics* **92**(4), 1024–1034.
- Aruoba, S., F. Diebold y C. Scotti (2009), ‘Real-time measurement of business conditions’, *Journal of Business & Economic Statistics* **27**(4), 417–427.
- Auerbach, A. (1982), ‘The index of leading indicators: Measurement without theory, thirty-five years later’, *The Review of Economics and Statistics* pp. 589–595.
- Escobal, J. y J. Torres (2002), ‘Un sistema de indicadores líderes del nivel de actividad para la economía peruana’, *Lima* .
- Etter, R. y M. Graff (2011), ‘A composite leading indicator for the peruvian economy based on the bcrps monthly business tendency surveys’, *Banco Central de Reserva del Perú, Documento de Trabajo* .

- Hamilton, J. (1994), *Time series analysis*, Princeton university Press.
- Kapsoli, J. y B. Bencich (2004), ‘Indicadores líderes, redes neuronales y predicción de corto plazo’, *Pontificia Universidad Católica del Perú, Revista Economía* **27**.
- Kim, C. y C. Nelson (1999), ‘State-space models with regime switching: classical and gibbs-sampling approaches with applications’, *MIT Press Books* **1**.
- Koop, G. (2003), *Bayesian Econometrics*, John Wiley and Sons Ltd.
- Kumar, G. (2013), ‘High-frequency real economic activity indicator for canada’, *Bank of Canada, Working Paper* .
- Martínez, M. y R. Quineche (2014), ‘Un indicador líder para el nowcasting de la actividad económica del Perú’, *Mimeo* .
- Ochoa, E. y J. Lladó (2003), ‘Modelos de indicadores líderes de actividad económica para el Perú’, *Revista Estudios Económicos* **10**.
- Robert, C. y g. Casella (2004), *Monte Carlo Statistical Methods*, Springer-Verlag New York.