

Estimación de la Curva de Rendimiento  
Cupón Cero para el Perú: Aspectos  
Metodológicos y Aplicaciones

*Javier Pereda*

*Banco Central de Reserva del Perú*

Marzo, 2005

El Gráfico del *Yield to Maturity* (YTM)  
no es la curva de rendimiento

# Data de bonos gobierno y CD's (en soles)

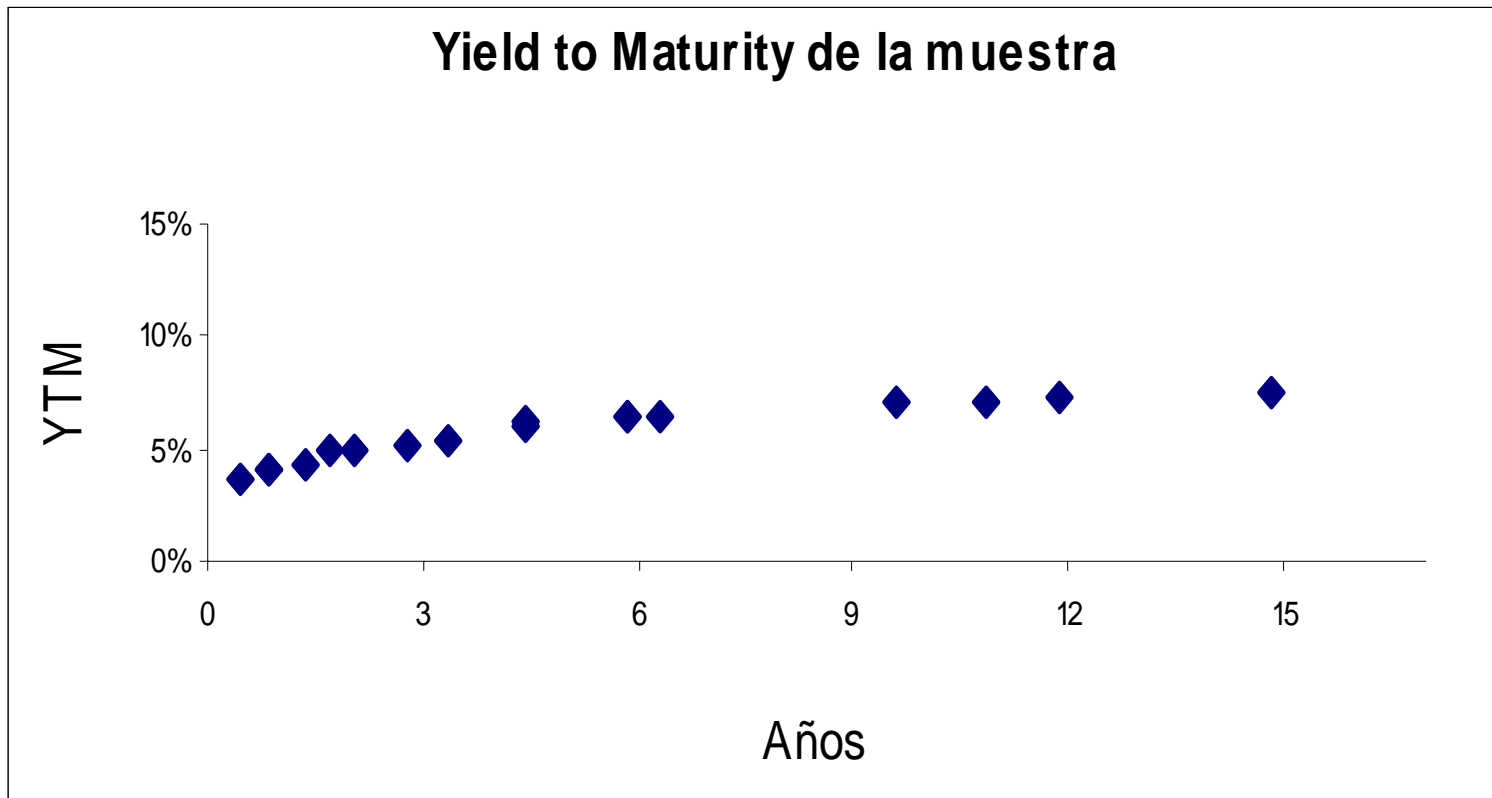
## (30.09.2004)

### Data de Bonos

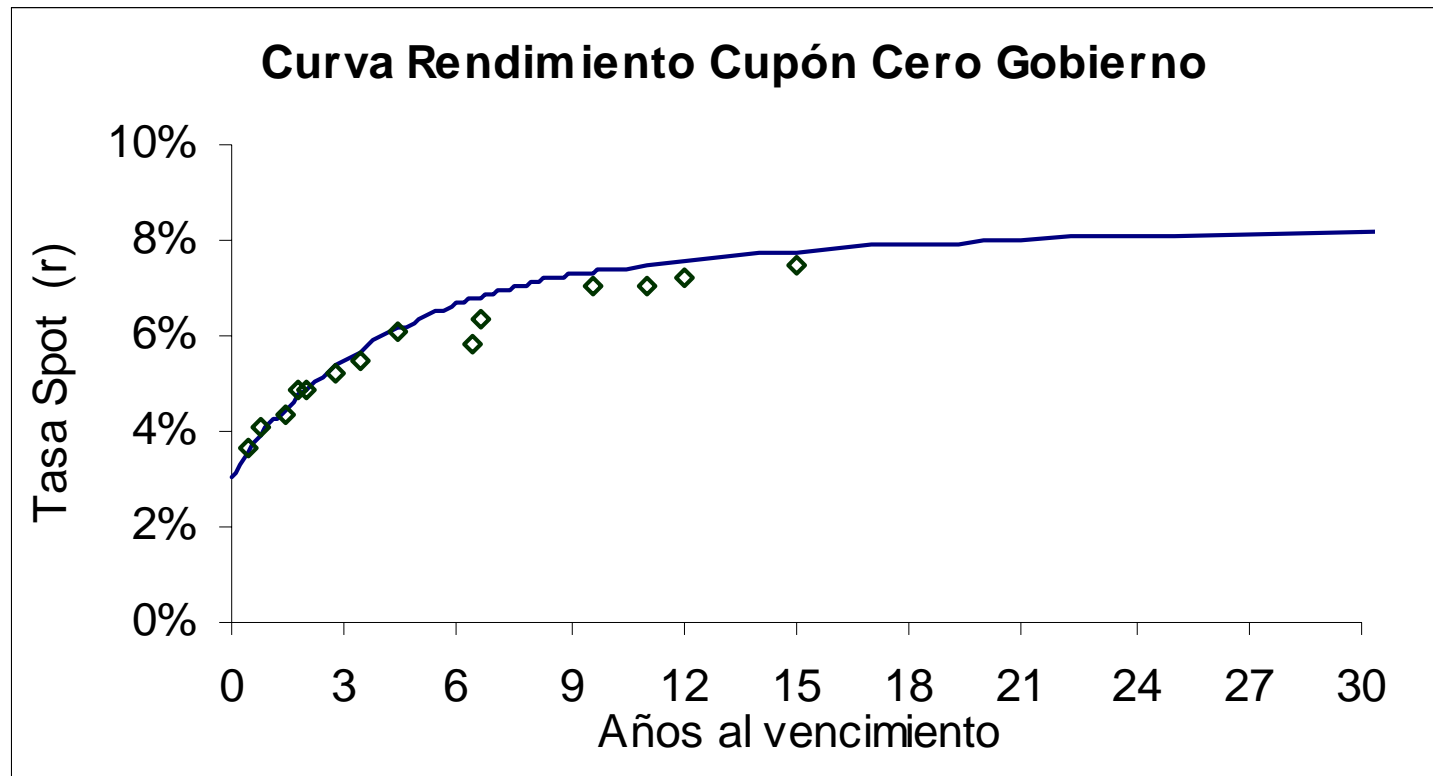
N° Instrumentos	17			
Tasa overnight interbancaria	3.01%			
Fecha negociación	30-Sep-05			
Emisor	Gobierno o Banco Central			
Tipo de Instrumento	Tipo Negociación	Cupón (tasa anual)	Fecha Vencimiento	Yield Mdo. (YTM)
BTP	Bid-Offer	5.15%	07-Mar-06	3.65%
BTP	Cerrada	4.98%	12-Ago-06	4.05%
BTP	Bid-Offer	4.98%	12-Ago-06	4.05%
BTP	Bid-Offer	7.20%	11-Feb-07	4.38%
CD	Cerrada-S	0.00%	20-06-07	4.85%
BTP	Bid-Offer	5.94%	09-Oct-07	4.83%
BTP	Bid-Offer	9.47%	09-Jul-08	5.25%
BTP	Bid-Offer	7.25%	11-Feb-09	5.45%
BTP	Cerrada	8.61%	10-Mar-10	6.09%
BTP	Bid-Offer	8.61%	10-Mar-10	6.12%
BTP	Cerrada	12.25%	10-Ago-11	6.40%
BTP	Bid-Offer	12.25%	10-Ago-11	6.35%
BTP	Cerrada	9.00%	31-Ene-12	6.50%
BTP	Bid-Offer	9.91%	05-May-15	7.08%
BTP	Bid-Offer	7.34%	12-Ago-16	7.08%
BTP	Bid-Offer	8.60%	12-Ago-17	7.25%
BTP	Bid-Offer	7.84%	12-Ago-20	7.44%

# Gráfico de los Yields de la muestra

(30-SET-2005)



# Gráfico de la Curva Rendimiento Gobierno (tasas spot - 30-SET-2005)



## Curva rendimiento:

- Gráfico que muestra la estructura temporal de las tasas de interés (tasas *spot* o *tasa cupón cero* para diferentes plazos).
- No es correcto representarlo por el YTM (*Yield to maturity*).
- El YTM es un complejo promedio de las tasas *spot* ponderado por los cupones.
- $YTM = Tasa\ Spot$ , sólo para bonos cupón cero.

¿Porqué estimar la Curva de Rendimiento?

- La tasa *spot* no es observable directamente, salvo para algunos plazos donde existe bonos cupón cero.
- El número de bonos es discreto y necesitamos estimar las tasas *spot* para cualquier plazo (curva continua).
- La curva *spot* soberana (o del gobierno) es la tasa de referencia (*benchmark*).



# Utilidad de la Curva de Rendimiento

# Valorización instrumentos financieros:

- Bonos existentes ilíquidos. Permite medir el desempeño de Fondos Mutuos, AFP, Bancos.
- Nuevas Emisiones bonos: dado la tasa cupón que ofrece.
- Instrumentos derivados: forwards, swaps.
- *Trading*: cotizaciones en el mercado están baratas (*cheap*) o caras (*rich*)- arbitrar.

# Ejemplos de Valorización

- Precio de un bono (descuento continuo):

$$P = \sum C \exp(-r_i t) + F \exp(-r_n n)$$

- Precio Forward tipo de cambio

$$\text{Valor Forward (p- años)} = T.C. \text{ Spot} * (1 + \text{TasaSoles})^p / (1 + \text{TasaDólares})^p$$

- Precio *Swap* de monedas

$$\text{ValorSwap}(p - \text{años}) = \sum_{i=1}^p \frac{\text{FlujoNuevosSoles}}{(1 + \text{TasaSoles}_i)^i} - t.c.spot. \sum_{i=1}^p \frac{\text{FlujoDólares}}{(1 + \text{TasaDólares}_i)^i}$$

# Política Monetaria

A partir de la curva spot se puede calcular la curva de tasas *forward* (implícitas, dado que no existe un mercado *forward*), que es utilizada por los bancos centrales para inferir las expectativas de tasas futura de interés de corto plazo (*overnight*).

# Métodos de Estimación de la Curva de Rendimiento

- No paramétricos:

Fischer, Nychka-Zervos (1995), Waggoner (1997), Anderson y Sleath (2001), entre otros. Básicamente modelos denominados *splines*. Estos son inestables cuando hay pocas observaciones.

- Paramétricos:

Modelo de Nelson & Siegel (1987), Modelo de Svensson (1994). Tienen una forma funcional definida. Son los más empleados por los bancos centrales cuando no hay suficientes instrumentos.

**Perú:** Rieckhof (1999), Rodríguez y Villavicencio (2005) y SBS (2005).

# Métodos de estimación empleados por algunos Bancos Centrales (Fuente: BIS)

<u>Banco central</u>	<u>Método</u>
Bélgica	Nelson-Siegel, Svensson
Canadá	Svensson
Estados Unidos	Fischer-Nychka-Zervos
Finlandia	Nelson-Siegel
Francia	Nelson-Siegel, Svensson
Alemania	Svensson
Italia	Nelson-Siegel
Japón	Fischer-Nychka-Zervos
Noruega	Svensson
España	Svensson
Inglaterra	Anderson-Sleath (hasta 2001 se usó Svensson)
Suecia	Fischer-Nychka-Zervos (anteriormente se usó Svensson)
Suiza	Svensson
Unión Europea	Svensson

# Modelo Nelson & Siegel

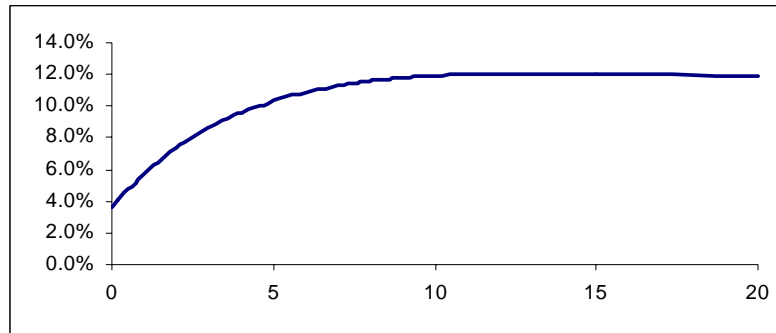
Ecuación 1: Ecuación para la tasa *spot*

$$r_{t,j}(m, \Theta) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{m/\tau_1} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)}}{m/\tau_1} - e^{\left(\frac{-m}{\tau_1}\right)} \right)$$

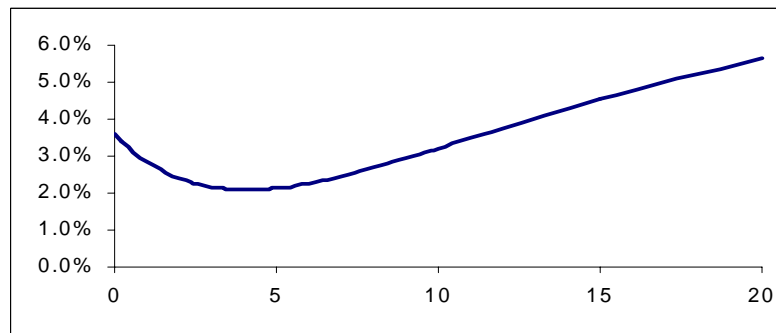
$$\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$$



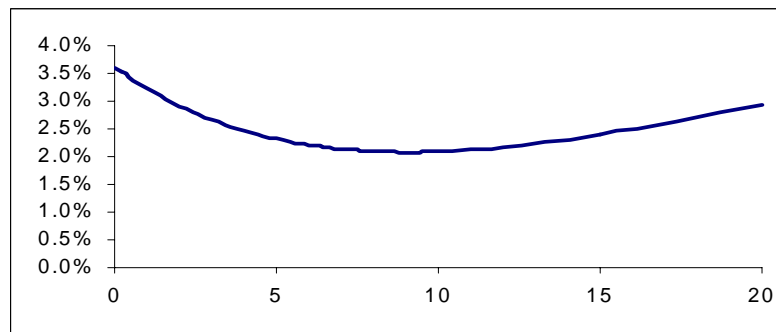
# N&S: Formas posibles de la curva rendimiento



$\beta_0$  10.2%  
 $\beta_1$  -6.6%  
 $\beta_2$  14.9%  
 $\tau_1$  4.460



$\beta_0$  10.2%  
 $\beta_1$  -6.6%  
 $\beta_2$  -14.9%  
 $\tau_1$  4.460



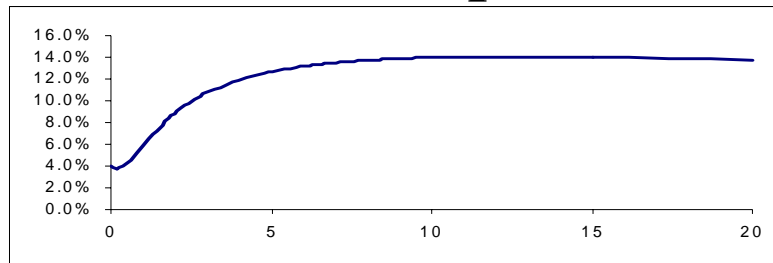
$\beta_0$  10.2%  
 $\beta_1$  -6.6%  
 $\beta_2$  -14.9%  
 $\tau_1$  10.000

# Modelo Svensson

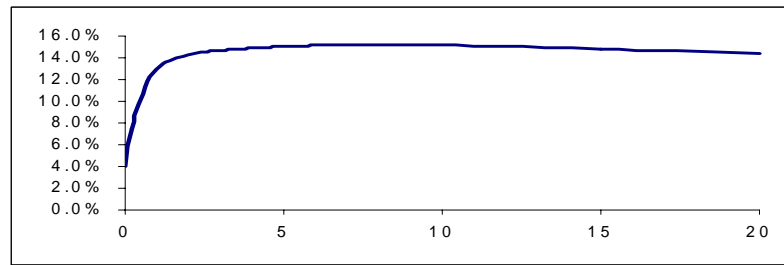
Ecuación 2: Ecuación para la tasa *spot*

$$r_{t,j}(m, \Theta) = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} \right) + \beta_2 \left( \frac{1 - e^{-m/\tau_1}}{m/\tau_1} - e^{-m/\tau_1} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-m/\tau_2}}{m/\tau_2} - e^{-m/\tau_2} \right)$$
$$\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$$

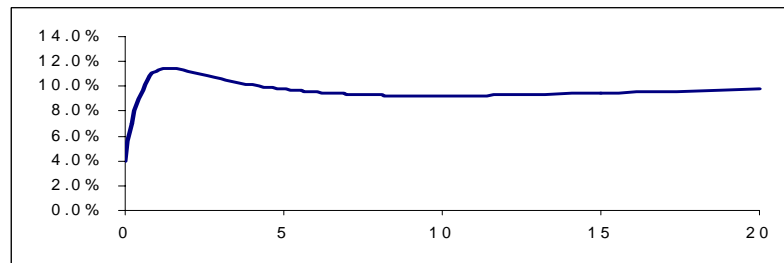
# Svensson: Formas posibles de la curva



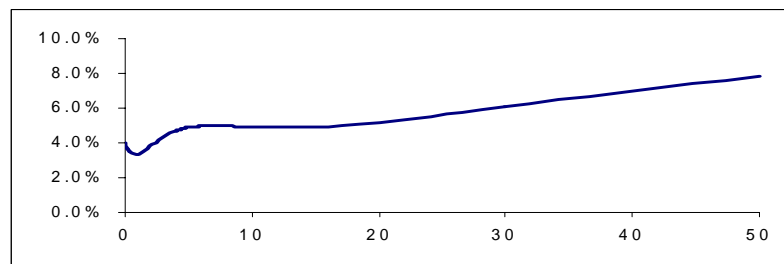
$\beta_0$  12.0%  
 $\beta_1$  -8.0%  
 $\beta_2$  -12.0%  
 $\beta_3$  10.0%  
 $\tau_1$  0.500  
 $\tau_2$  5.000



$\beta_0$  12.0%  
 $\beta_1$  -8.0%  
 $\beta_2$  12.0%  
 $\beta_3$  10.0%  
 $\tau_1$  0.500  
 $\tau_2$  5.000



$\beta_0$  12.0%  
 $\beta_1$  -8.0%  
 $\beta_2$  12.0%  
 $\beta_3$  -10.0%  
 $\tau_1$  0.500  
 $\tau_2$  5.000



$\beta_0$  12.0%  
 $\beta_1$  -8.0%  
 $\beta_2$  -10.0%  
 $\beta_3$  -20.0%  
 $\tau_1$  1.000  
 $\tau_2$  10.000

# Estimación de los Modelos de Nelson & Siegel y Svensson para el Perú

# Estimación Parámetros para N&S y Svensson (Optimización no lineal)

Min F.O.

para  $\Theta$

**N & S:**  $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1)$

**Svensson:**  $\Theta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2)$

**sujeto a:**

$$\beta_0 + \beta_1 = r(t=0)$$

$$r(t=0) > 0 \quad (\text{tasas } \textit{overnight} \text{ positiva})$$

$$r(t=\infty) > 0 = \beta_0 \quad (\text{tasa largo plazo positiva})$$

$$f_t \geq 0 \quad (\text{tasa } \textit{forward} \text{ no negativa})$$

.....

- Se estiman 4 versiones de la F.O. tanto para el modelo de N&S y para Svensson.

F.O. (errores de precios): 1 versión

1.  $\text{Min } \Sigma (P_i - P_i(\Theta))^2$

F.O. (errores de precios ponderados): 3 versiones

$\text{Min } \Sigma [(P_i - P_i(\Theta)) \cdot W_i]^2$

2. W1:  $W_i = 1/D_i / (\Sigma 1/D_i)$  ( propuesta por Bliss, 1994)

3. W2:  $W_i = 1/D_i^*$  ( Bank of England)

4. W3:  $W_i = 1/P_i \cdot D_i^*$  (Banco de Bélgica)

.....

donde:

$D_i$  = duración de *McCauley*.

$D^*i$  = duración modificada

$P_i$  = precio (observado) del bono

¿Cómo se relacionan las ponderaciones?

Así:  $W_1 / (1 + y) = W_2 = P \cdot W_3$

# Data

- **Período:** estimación diaria (una curva para cada día y para cada versión de N&S y Svensson) para las siguientes fechas:  
1 día por mes para: Ene.2004-Ago.2005 (20 días)  
Todos los día útiles de Set.2005 (22 días).  
Total: 42 días.
- **Instrumentos:** Bonos del gobierno y CD's en soles de operaciones cerradas en el mercado primario y mercado secundario. También de propuestas bid-offer.



## Criterios de selección del modelo

- Bondad de ajuste a la data (reducir errores estimación).
- Flexibilidad del Modelo: formas compatible con la data.
- Estabilidad de los parámetros (menor volatilidad de  $\beta_0$ ).

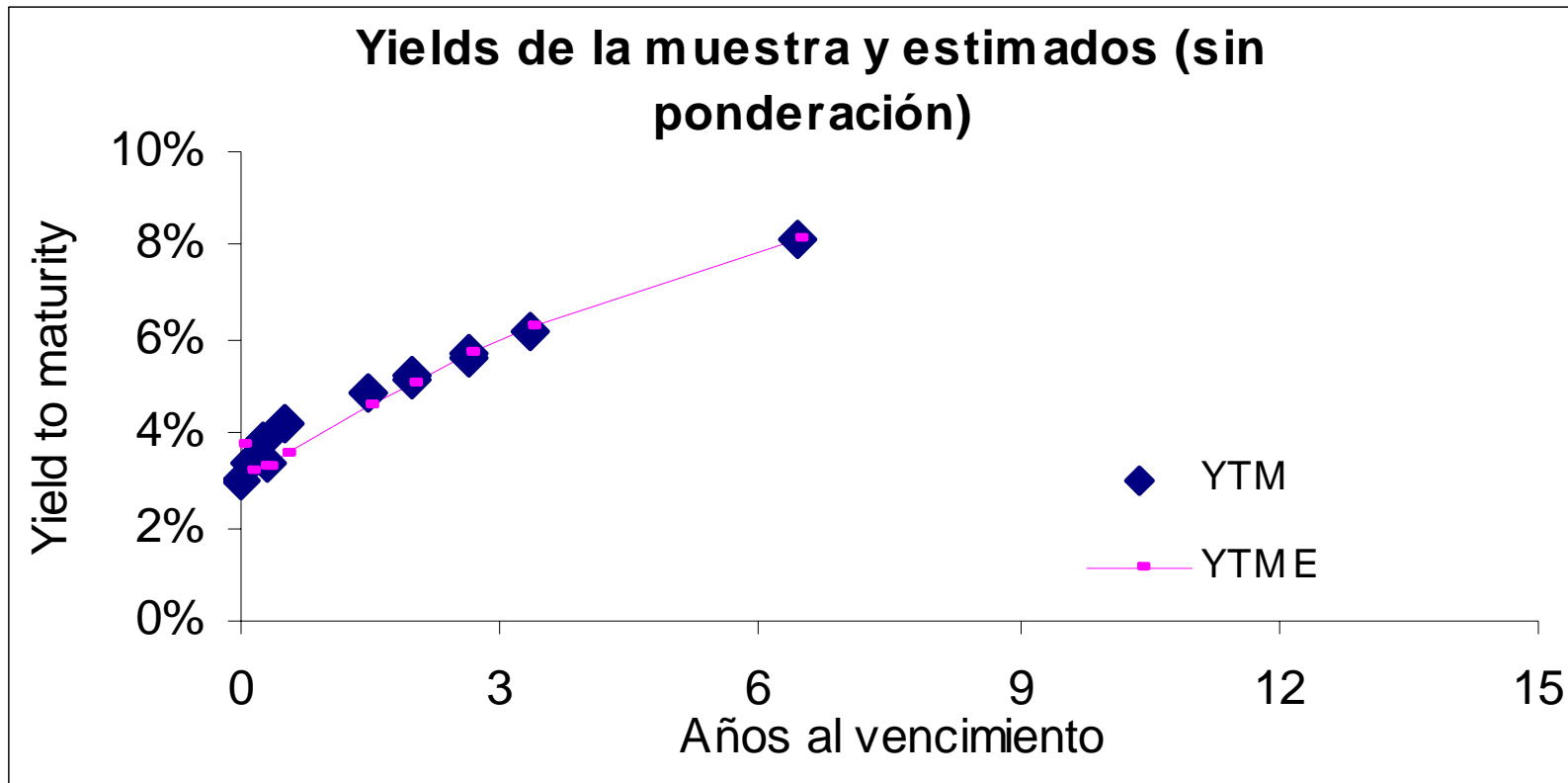
# Resultados de la Estimación de la Curva de Rendimiento

## Ajuste de la data: ¿N&S ó Svensson?

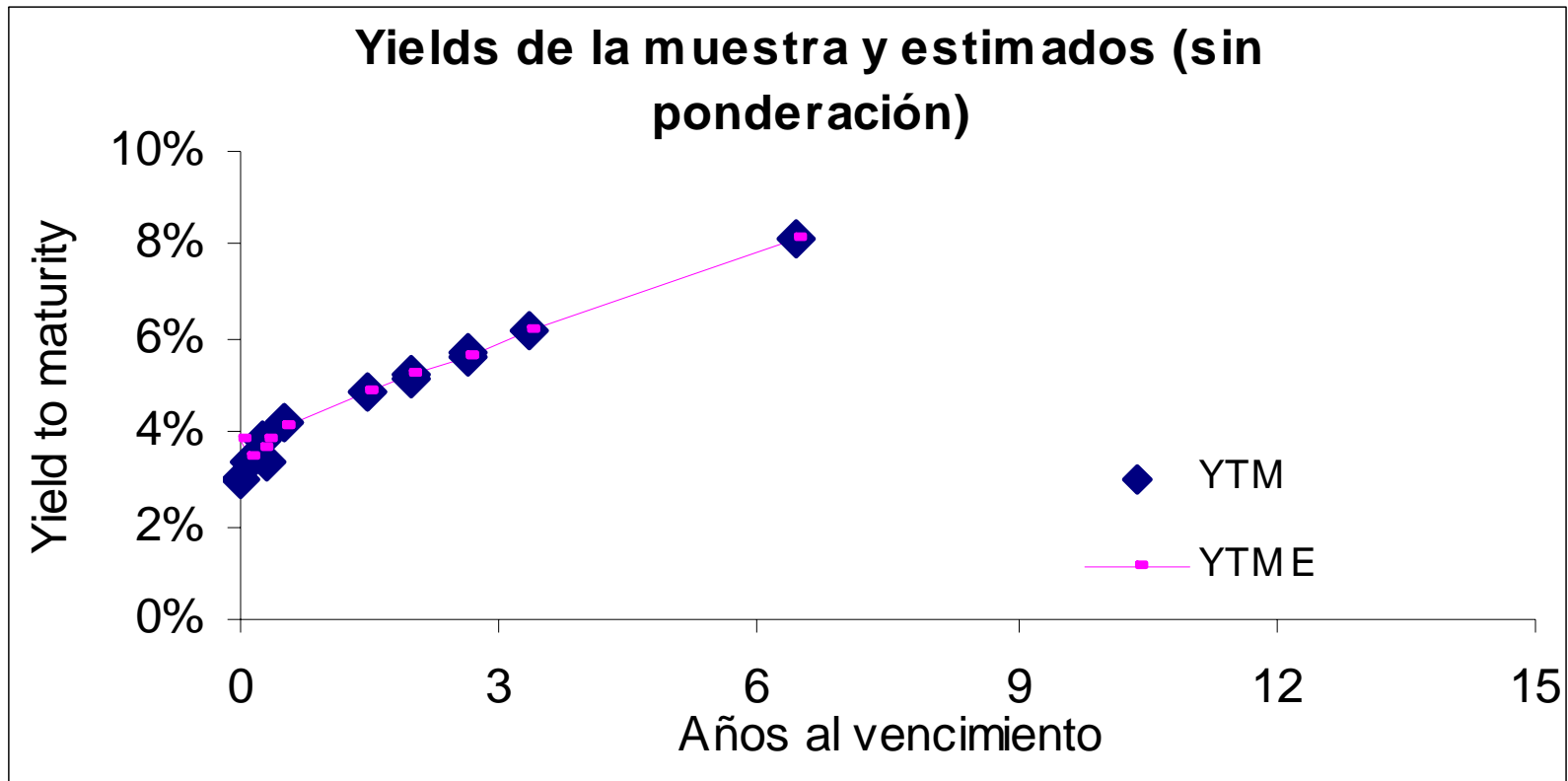
- Svensson tiene mejor ajuste que N&S en precios y yields. En yields el error absoluto medio (MAE) de Svensson es de 6 pb y en precios es de 14 pb (14 ctvs. por 100).

# Nelson & Siegel

(ajuste menor en yields)



# Svensson



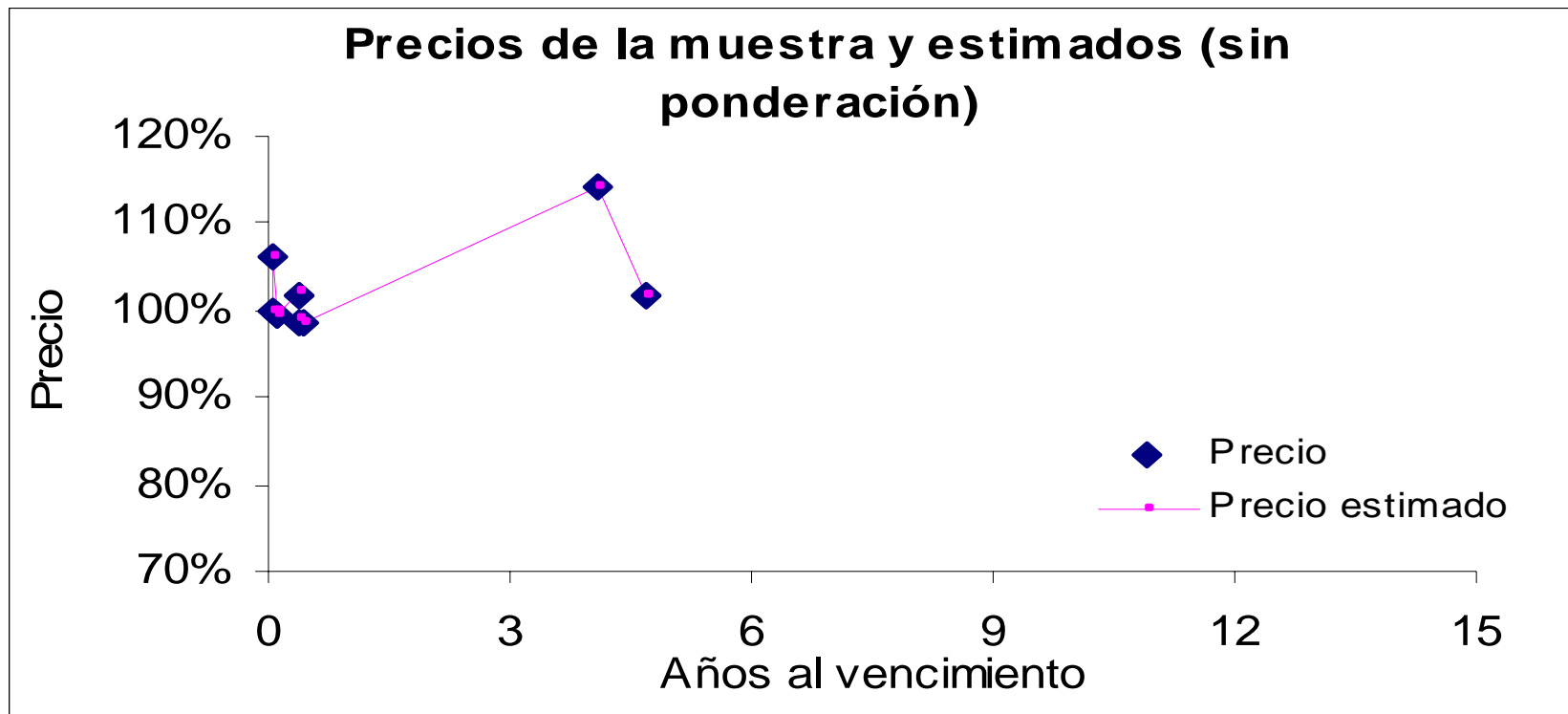
## ¿F.O. ponderada o sin ponderar?

- Es preferible la f.o. precios ponderada pues mejora el ajuste de *yields* (implícitos) del tramo corto de la curva de rendimiento.
- No hay diferencia importante entre los métodos ponderados analizados.

# F.O:Min Precios (sin ponderar)

(data del 28.05.2005)

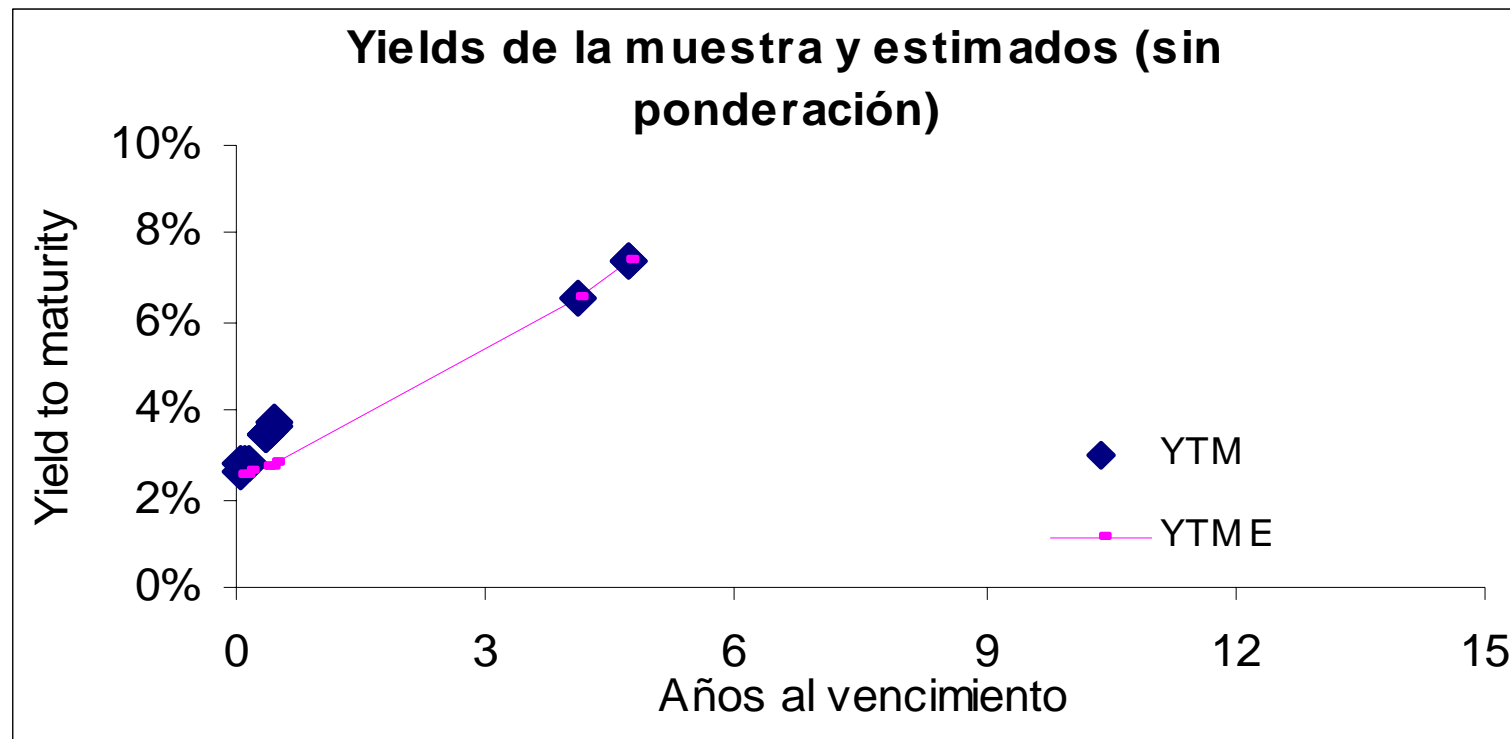
## Buen Ajuste Precios



# F.O. Min Precios (sin ponderar)

(data del 28.05.2005)

## Mal Ajuste *Yields* Plazos Cortos



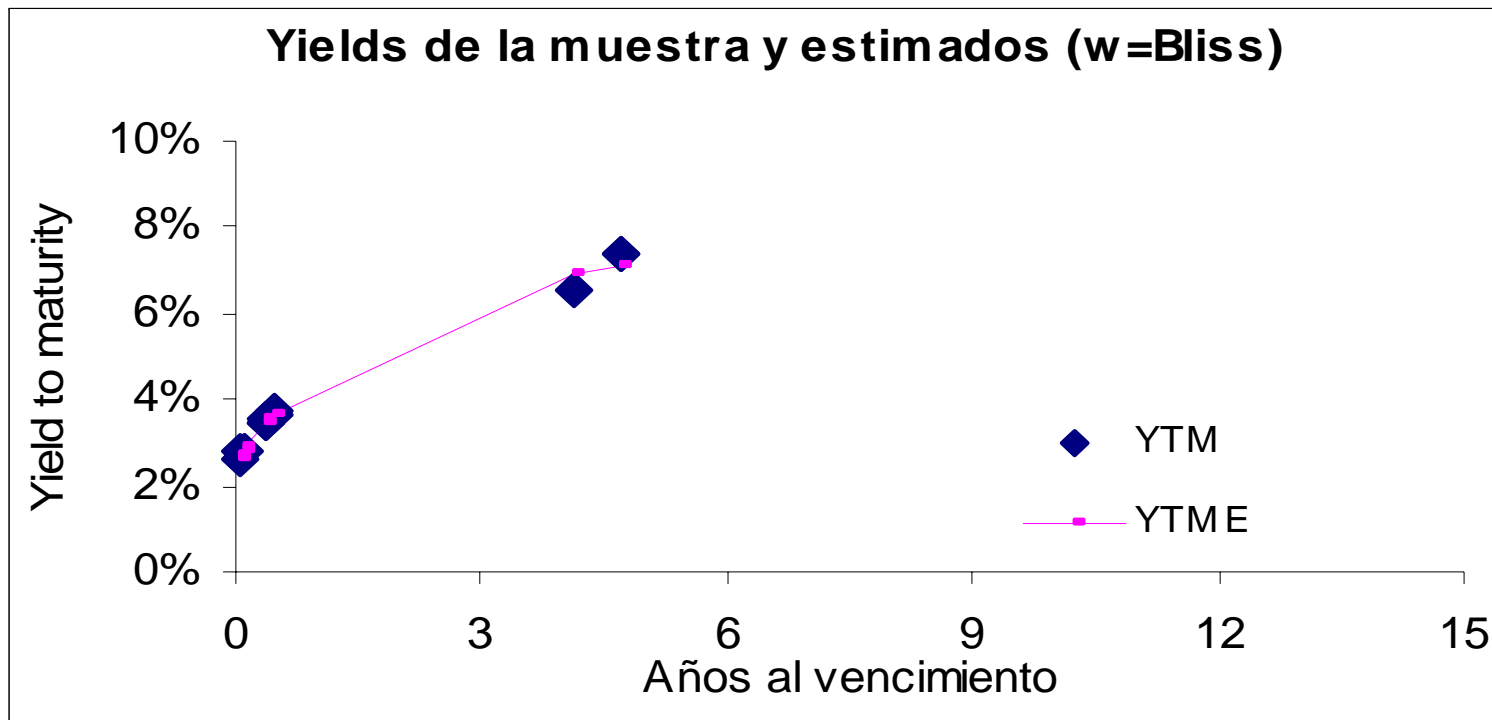


# Solución: Ponderar F.O. Min Precios

Ponderación:  $w_i = \text{Inversa Duración}$

(data del 28.05.2005)

Mejora Ajuste *Yields* Plazos Cortos

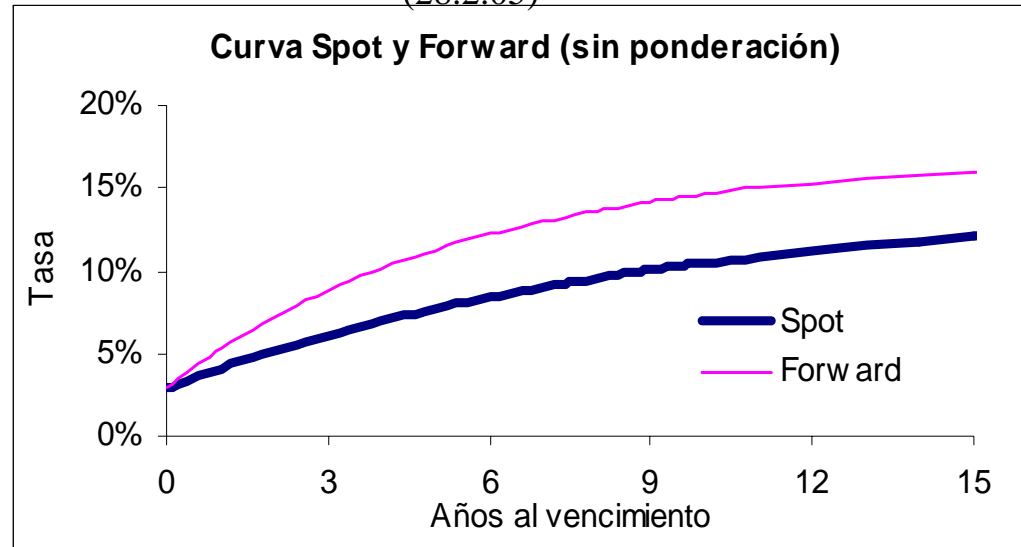


## Estabilidad de parámetros y convergencia

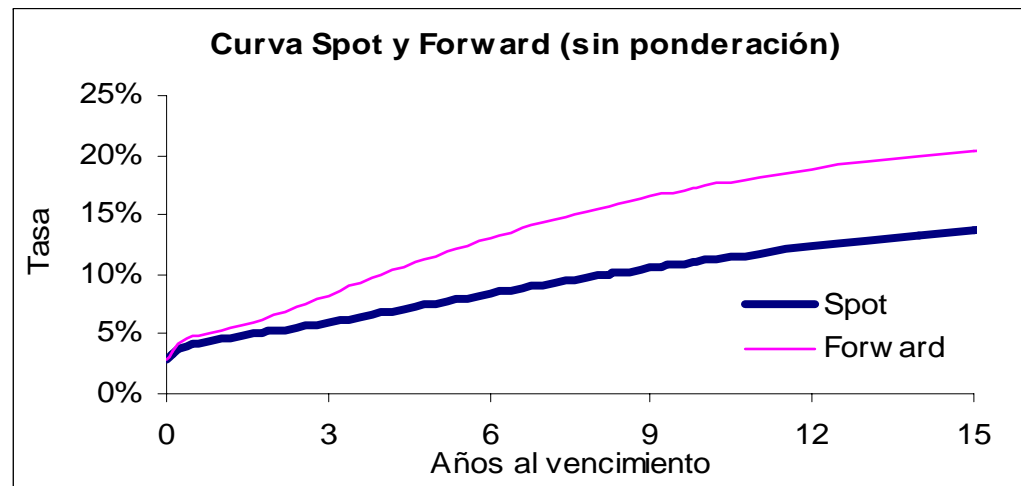
- El modelo de Svensson muestra una menor volatilidad de  $\beta_0$  (tasa largo plazo) respecto al de N&S.
- N&S converge más rápido (pq' tiene menos parámetros).

# Nelson & Siegel (menor volatilidad beta0)

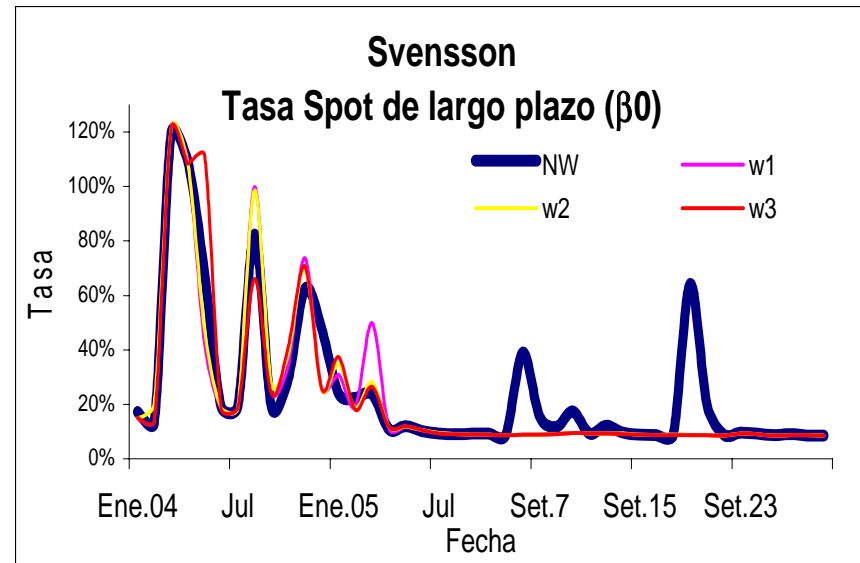
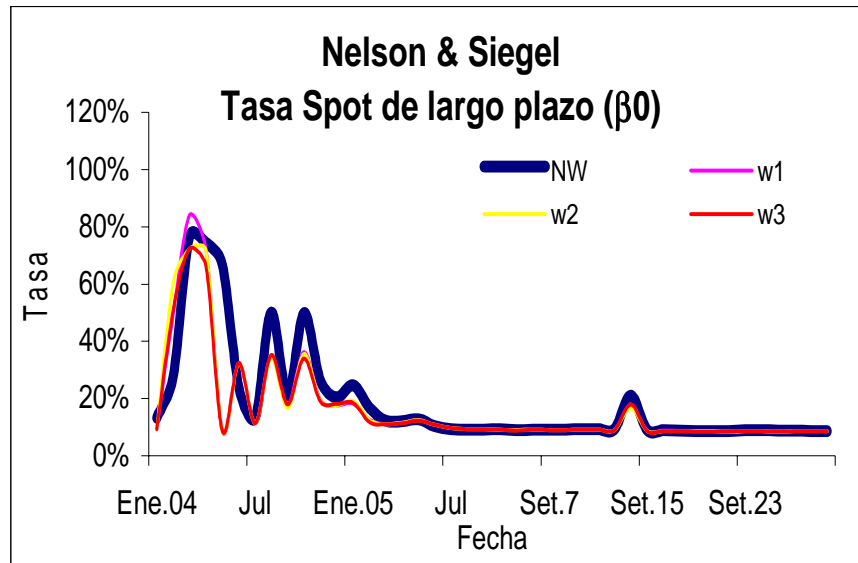
(28.2.05)



# Svensson (28.2.05)



# Volatilidad de $\beta_0$



# Convergencia: Svensson

(30.09.2005)

Estimación de la curva spot y forward usando el modelo de N&S Svensson (SV)					
30-Sep-05		Función Objetivo sin ponderar	Diferentes ponderaciones asumidas para la F.O.		
			w= Bliss	w= 1/D*	w= 1/P.D*
Maduración	m	1.0	1.0	1.0	1.0
Tasa interés de largo plazo	$\beta_0$	8.56%	8.51%	8.51%	8.51%
Componente de corto plazo	$\beta_1$	-5.55%	-5.50%	-5.50%	-5.50%
Componente de mediano plazo	$\beta_2$	-26.93%	-17.39%	-17.20%	-27.41%
	$\beta_3$	23.29%	13.36%	13.17%	23.31%
Parámetro de ajuste de corto plazo	$\tau_1$	1.12	0.98	0.98	0.97
Parámetro de ajuste de mediano plazo	$\tau_2$	1.05	0.845	0.844	0.885
Tasa spot en el período m	r (m)	4.1316%	4.1726%	4.1726%	4.1771%
Tasa forward en el período m	f (m)	5.0067%	4.9682%	4.9682%	4.9829%
Suma de residuos al cuadrado (Min. precios)		0.0001666	0.0001681	0.0001681	0.0001686
Nº Iterac		20	160	165	167

# Convergencia: Nelson & Siegel

(30.09.2005)

Estimación de la curva spot y forward usando el modelo de Nelson & Siegel					
30-Sep-05		Función Objetivo sin ponderar	Diferentes ponderaciones asumidas para la F.O.		
			w= Bliss	w= 1/D*	w= 1/P.D*
Maduración	m	1.0	1.0	1.0	1.0
Tasa interés de largo plazo	$\beta_0$	8.67%	8.62%	8.61%	8.58%
Componente de corto plazo	$\beta_1$	-5.66%	-5.61%	-5.60%	-5.57%
Componente de mediano plazo	$\beta_2$	-0.04%	0.00%	0.00%	0.00%
Parámetro de ajuste de corto plazo	$\tau_1$	2.28	2.243	2.241	2.213
Tasa spot en el período m	r (m)	4.0802%	4.0927%	4.0931%	4.0991%
		4.08%	4.09%	4.09%	4.10%
Tasa forward en el período m	f (m)	5.0061%	5.0261%	5.0267%	5.0361%
Suma de residuos al cuadrado (Min. precios)		0.0001661	0.0001703	0.0001708	0.0001781
	Nº Iterac	15	20	20	20

# Aplicaciones

# Trading

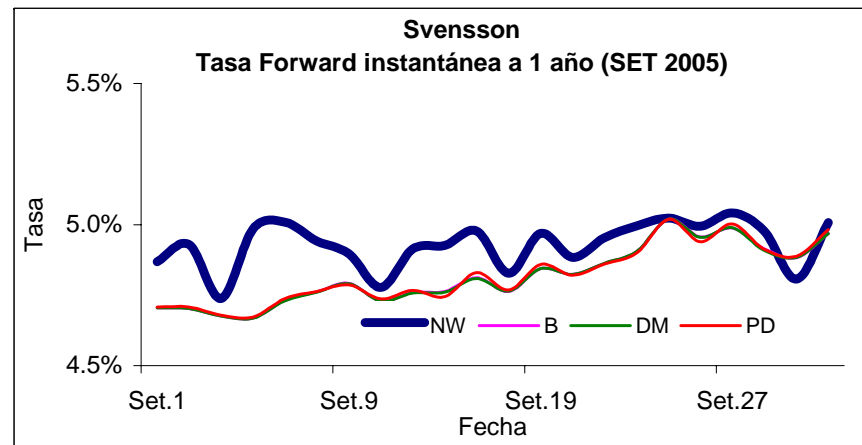
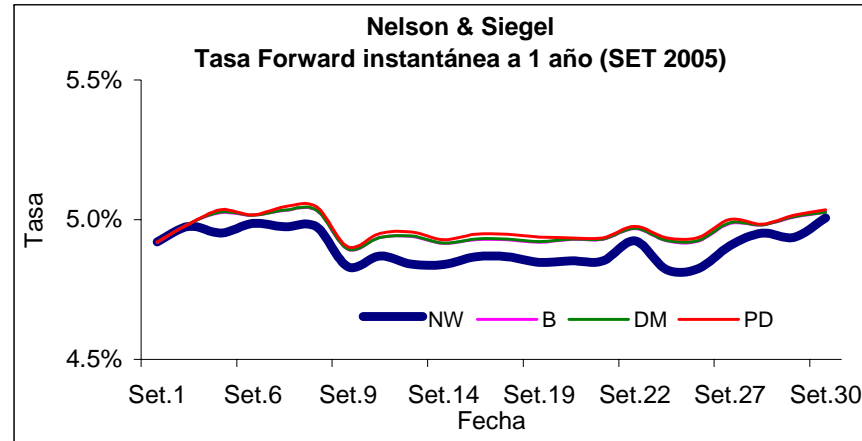
## Análisis: Barato (-) Caro (+) Cartera (30.09.05)

Tipo de Instrumento	Tipo Negociación	Fecha Vencimiento	Precio Mcdo. (P)	Precio Teórico según Svensson			
				F.O. Sin Pond. Pn	F.O. Ponderada		
					P1 (w1)	P2 (w2)	P3 (w3)
BTP	Bid-Offer	07-Mar-06	100.97%	-0.03%	0.00%	0.00%	-0.01%
BTP	Cerrada	12-Ago-06	101.44%	-0.04%	0.01%	0.01%	0.01%
BTP	Bid-Offer	12-Ago-06	101.44%	-0.04%	0.01%	0.01%	0.01%
BTP	Bid-Offer	11-Feb-07	104.67%	0.05%	0.07%	0.07%	0.08%
CD	Cerrada-S	20-06-07	92.08%	-0.24%	-0.25%	-0.25%	-0.24%
BTP	Bid-Offer	09-Oct-07	104.95%	0.10%	0.06%	0.06%	0.08%
BTP	Bid-Offer	09-Jul-08	112.88%	0.10%	0.04%	0.04%	0.06%
BTP	Bid-Offer	11-Feb-09	106.44%	0.45%	0.40%	0.40%	0.41%
BTP	Cerrada	10-Mar-10	110.15%	-0.30%	-0.31%	-0.31%	-0.30%
BTP	Bid-Offer	10-Mar-10	110.05%	-0.40%	-0.40%	-0.40%	-0.39%
BTP	Cerrada	10-Ago-11	129.90%	-0.11%	-0.06%	-0.06%	-0.06%
BTP	Bid-Offer	10-Ago-11	130.19%	0.18%	0.22%	0.22%	0.22%
BTP	Cerrada	31-Ene-12	114.27%	0.22%	0.28%	0.28%	0.27%
BTP	Bid-Offer	05-May-15	123.49%	-0.45%	-0.42%	-0.42%	-0.44%
BTP	Bid-Offer	12-Ago-16	102.95%	0.87%	0.88%	0.88%	0.85%
BTP	Bid-Offer	12-Ago-17	111.75%	-0.14%	-0.16%	-0.16%	-0.18%
BTP	Bid-Offer	12-Ago-20	104.64%	-0.24%	-0.32%	-0.32%	-0.35%



# Política Monetaria

## (Tasa Interbancaria 1 año)



## Consideraciones finales

- Se recomienda estimar primero N&S. Usar los parámetros estimados como valores iniciales para estimar Svensson. Se elige el que tiene mejor ajuste.
- La volatilidad del parámetro  $\beta_0$  es alta antes del 2004 por falta de bonos de maduración mayor a 10 años. En julio 2004 se emitió bono 2020 (14,5 años aprox.) que mejoró la estabilidad curva. No siempre se transan estos bonos, tampoco hay propuestas. Solución: usar encuestas para bonos ilíquidos como lo propone SBS (2005).

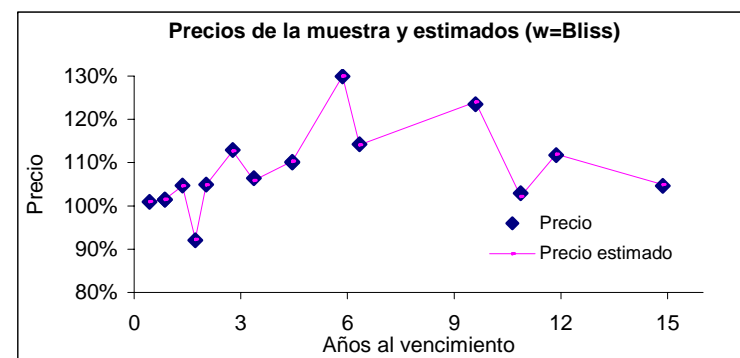
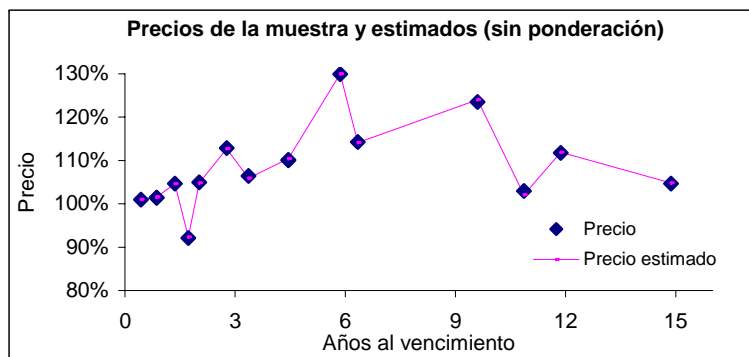
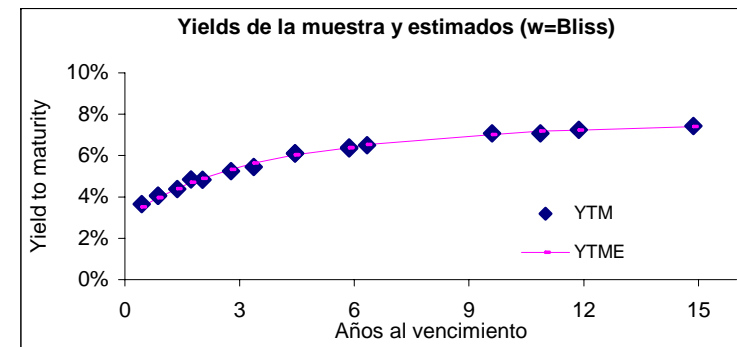
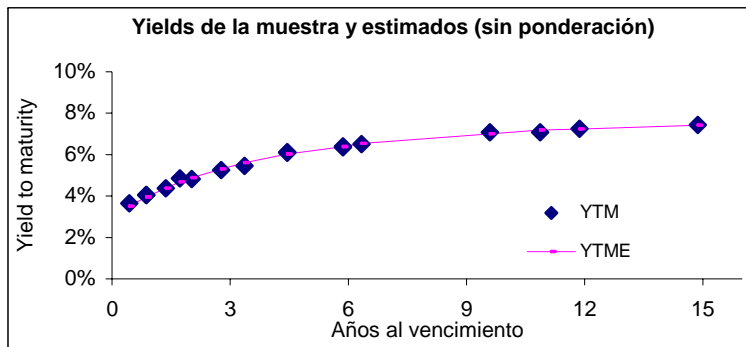
.....

- Las tasas *spot* estimadas son confiables dentro del período de la data. La extrapolación de los tasas a plazos mayores (o menores) donde no hay data no es confiable y es inestable.
- Ello se debería tener en cuenta para estimar la curva de rendimiento de dólares y soles VAC.

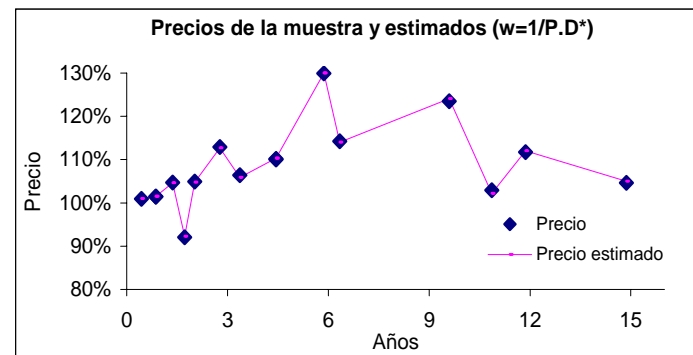
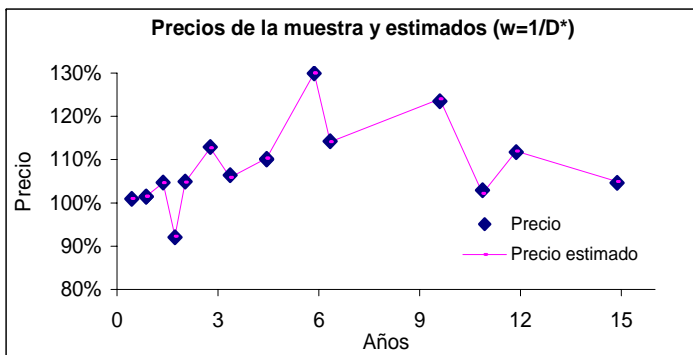
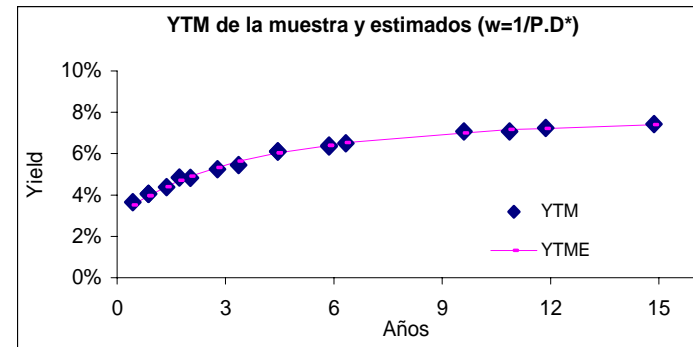
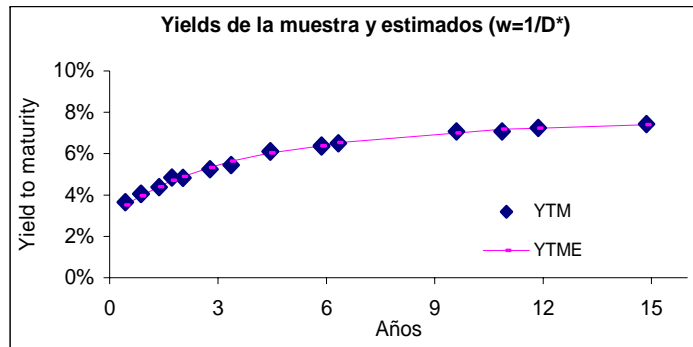
»»FIN

# Anexo

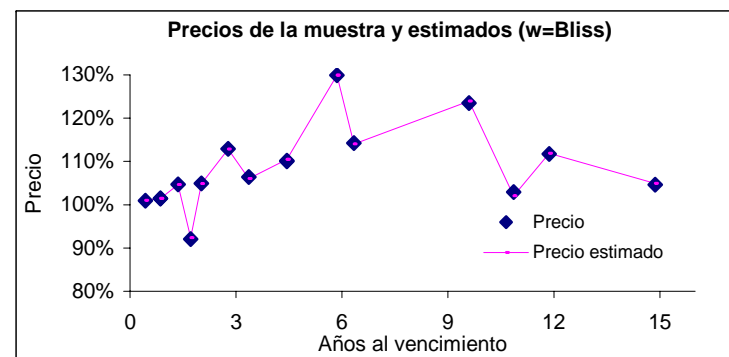
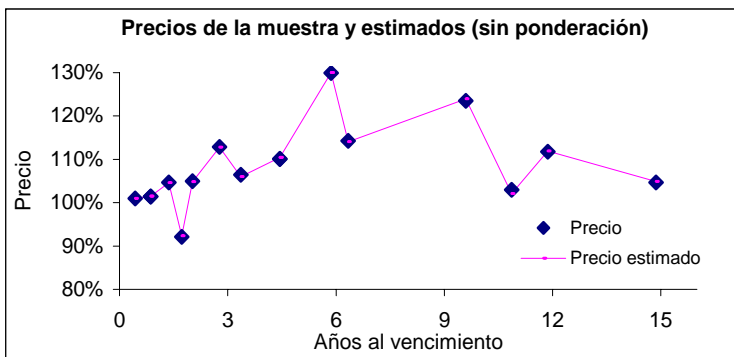
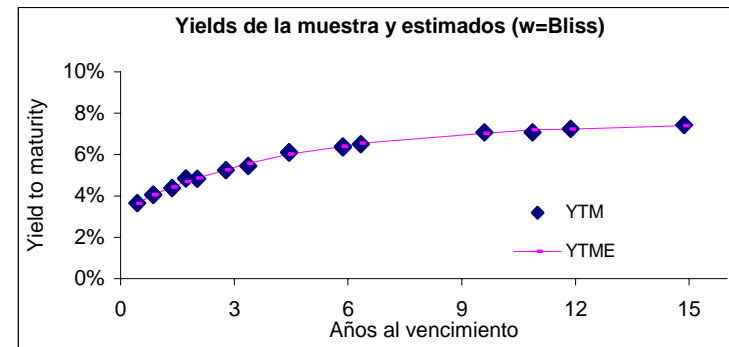
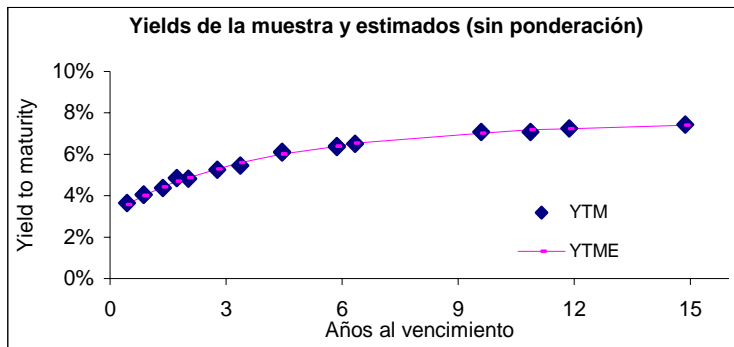
# N&S (30.09.2005)



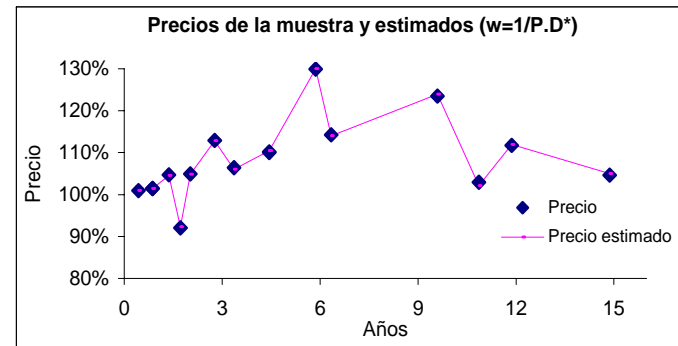
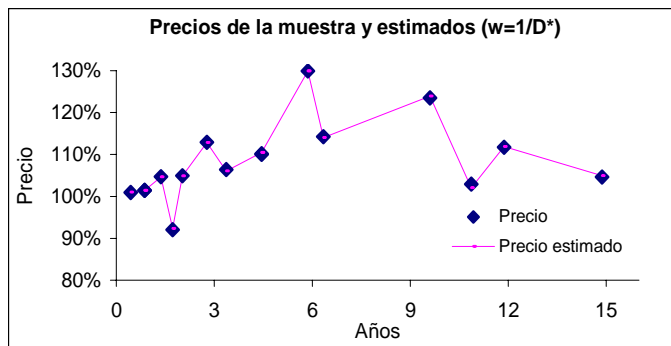
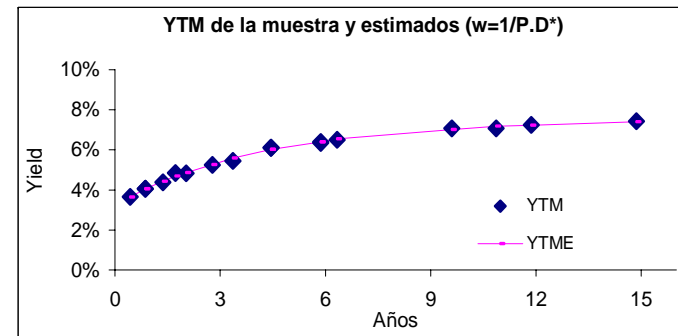
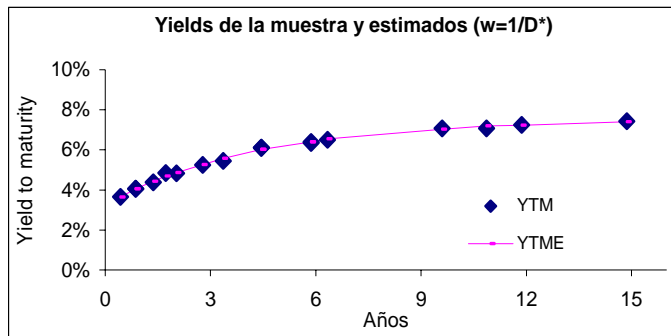
# N&S (30.09.2005)



# Svensson (30.09.2005)

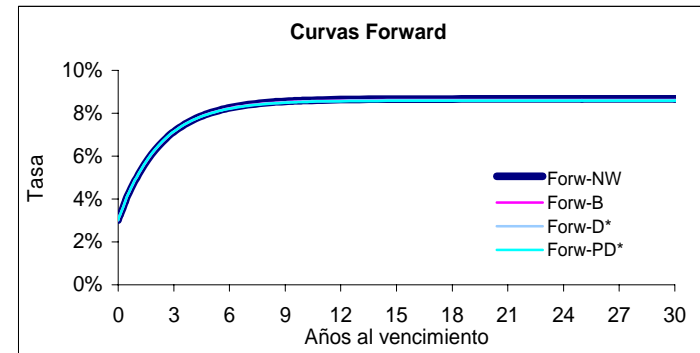
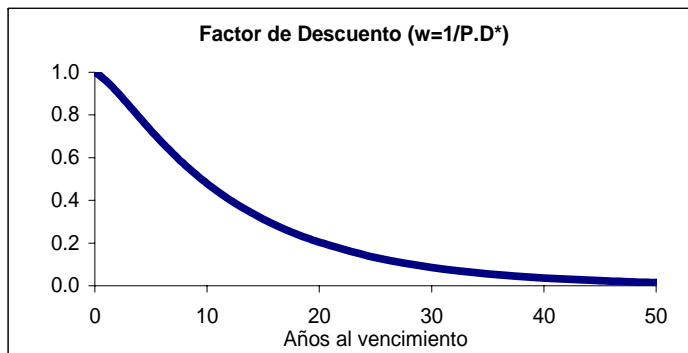
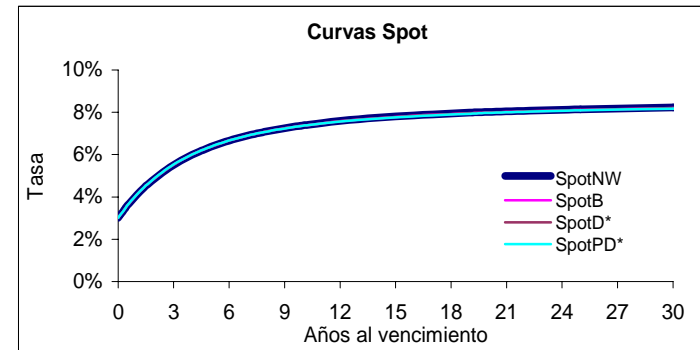
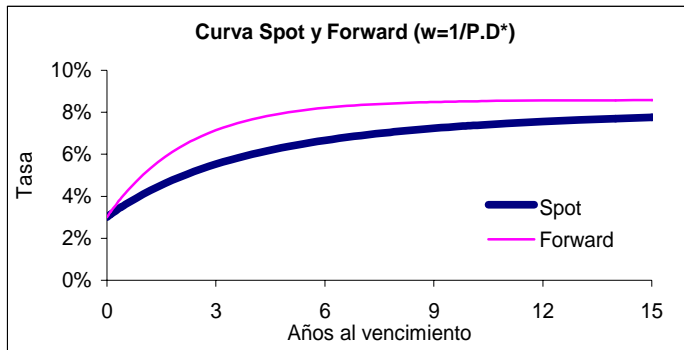


# Svensson (30.09.2005)

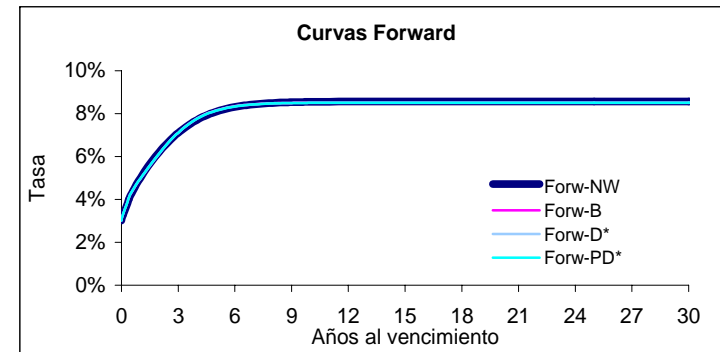
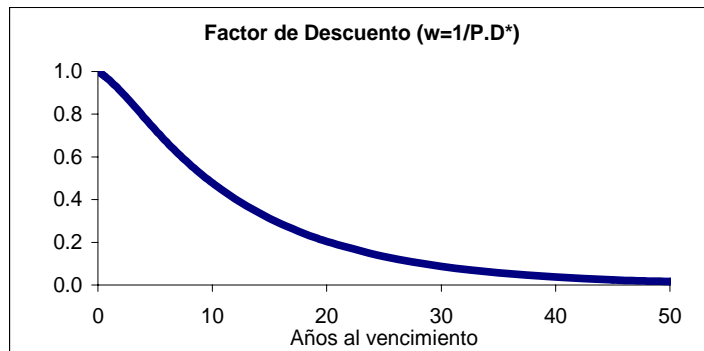
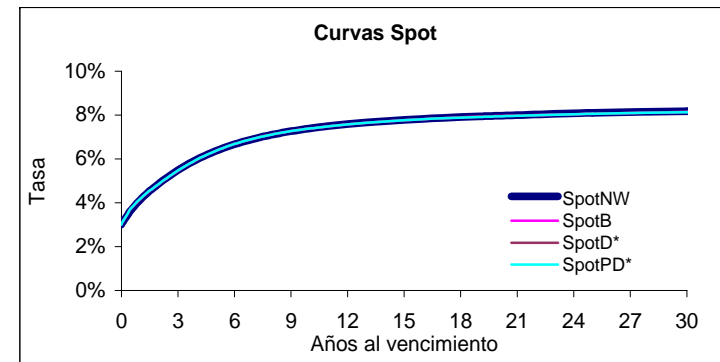
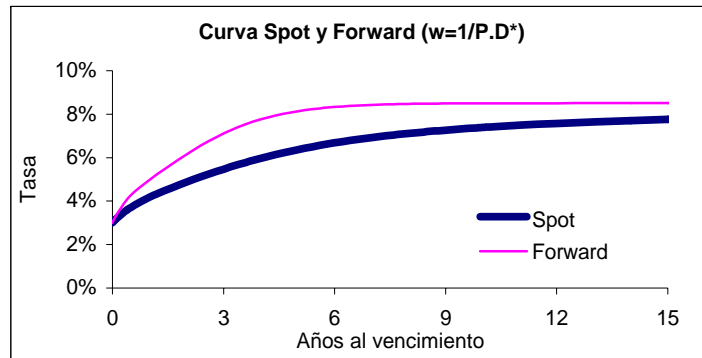




# N&S (30.09.2005)



# Svensson (30.09.2005)



# Ajuste de la data

Error Absoluto Medio (MAE)

$$\text{MAE} = \frac{\sum |\text{errores}|}{n}$$

Raíz del Error Cuadrático Medio (RECM)

$$\text{RECM} = \text{raiz} [\sum (\text{errores})^2]$$

•••••

Muestra: 42 días

<b>MAE</b>				
<b>Modelo</b>	<b>F.O sin pond.</b>	<b>F.O. Ponderada</b>		
		<b>w1</b>	<b>w2</b>	<b>w3</b>
<b>Ajuste Precios</b>				
<b>N &amp; S</b>	0.19%	0.21%	0.21%	0.20%
<b>Svensson</b>	0.14%	0.15%	0.15%	0.15%
<b>Ajuste Yields (implícitos)</b>				
<b>N &amp; S</b>	0.12%	0.11%	0.10%	0.10%
<b>Svensson</b>	0.07%	0.06%	0.06%	0.06%

<b>RECM</b>				
<b>Modelo</b>	<b>F.O sin pond.</b>	<b>F.O. Ponderada</b>		
		<b>w1</b>	<b>w2</b>	<b>w3</b>
<b>Ajuste Precios</b>				
<b>N &amp; S</b>	0.27%	0.33%	0.33%	0.32%
<b>Svensson</b>	0.23%	0.25%	0.25%	0.25%
<b>Ajuste Yields (implícitos)</b>				
<b>N &amp; S</b>	0.17%	0.15%	0.15%	0.15%
<b>Svensson</b>	0.11%	0.09%	0.09%	0.09%

.....

**Muestra: 42 días (tramo corto: 0-2 años)**

<b>MAE</b>				
<b>Modelo</b>	<b>F.O sin pond.</b>	<b>F.O. Ponderada</b>		
		<b>w1</b>	<b>w2</b>	<b>w3</b>
<b>Ajuste Precios</b>				
<b>N &amp; S</b>	0.10%	0.07%	0.07%	0.08%
<b>Svensson</b>	0.05%	0.04%	0.04%	0.03%
<b>Ajuste Yields (implícitos)</b>				
<b>N &amp; S</b>	0.18%	0.15%	0.14%	0.13%
<b>Svensson</b>	0.10%	0.06%	0.06%	0.06%

<b>RECM</b>				
<b>Modelo</b>	<b>F.O sin pond.</b>	<b>F.O. Ponderada</b>		
		<b>w1</b>	<b>w2</b>	<b>w3</b>
<b>Ajuste Precios</b>				
<b>N &amp; S</b>	0.14%	0.10%	0.10%	0.11%
<b>Svensson</b>	0.08%	0.06%	0.06%	0.06%
<b>Ajuste Yields (implícitos)</b>				
<b>N &amp; S</b>	0.24%	0.19%	0.18%	0.18%
<b>Svensson</b>	0.15%	0.11%	0.11%	0.11%

Estimación de la Curva de Rendimiento  
Cupón Cero para el Perú: Aspectos  
Metodológicos y Aplicaciones

*Javier Pereda*

*Banco Central de Reserva del Perú*

Marzo, 2005