Valuación de garantías del Estado en concesiones con ingresos estocásticos*

Francisco Velásquez Llatas
Universidad de Lima
Escuela de Postgrado

Víctor del Carpio Neyra
Pontificia Universidad Católica del Perú
Maestría de Matemáticas aplicadas

Lima, diciembre 2006

1. Introducción

En los países en desarrollo se evidencia hoy una creciente tendencia de llevar a cabo proyectos bajo el esquema de Asociación Público Privada (APP)[1]. En este contexto, estos particulares proyectos sociales son llevados a cabo por inversionistas privados que son atraídos tanto por la naturaleza económica de la concesión como por la reducción de riesgo que supone la extensión de una garantía de recuperación de su inversión, por parte del Estado.

Desde una perspectiva estatal, puede advertirse que una ventaja de este esquema es que se induce al inversionista privado a concentrarse en la eficiencia de los procesos (más que en la administración del riesgo de demanda) y que una desventaja resulta ser el hecho de que ahora el Estado asume un riesgo que precisa ser evaluado en la medida que éste se obliga a efectuar la cobertura correspondiente en caso de falla.

La evaluación de este riesgo se constituye así en un factor relevante de la esfera de decisiones del Estado, y teniendo en cuenta el comportamiento estocástico de los ingresos de la concesión, la pregunta: *¿Cuál es el valor del pasivo contingente que el Estado asume al extender esta garantía por el periodo de concesión?* surge como una interrogante que debe resolverse.

El objetivo básico de este documento es responder esta pregunta desde una perspectiva teórica, y presentar a partir de ello una metodología que permita efectuar un adecuado cálculo del valor de la garantía en cuestión, tomando como base el caso práctico de una concesión vial actualmente en estudio en el Perú.

Para la solución teórica se parte de la investigación base de Merton [9], quien considera que la valuación de una garantía financiera es isomorfa a la valuación de una opción de venta Europea (ó put option), y en tal sentido, sólo bastaría aplicar la fórmula estándar de Black y Scholes [1] si el proceso subyacente corresponde a un movimiento Browniano o proceso Wiener; o en su defecto, debería aplicarse la generalización de la indicada fórmula, planteada en Merton [8], si se verifica que la dinámica de la variable corresponde a un proceso estocástico de salto-difusión.

*Los autores expresamos nuestro agradecimiento a René Cornejo por sus valiosos comentarios y por las facilidades brindadas en el desarrollo de esta investigación. Agradecemos asimismo a Sergio Hinojosa; fue él quien nos presentó tanto el problema como las ideas generales de la solución básica.

[1]Ver Hammami et. al [4].

Para la aplicación práctica se toma como referencia la variable de ingresos de la ya señalada concesión vial, cuya serie temporal sirve de base para la estimación de los correspondientes parámetros. La metodología de valoración mas adecuada es propuesta así, luego del análisis de los resultados obtenidos.

El documento consta de tres partes: en la primera se plantea el problema, en la segunda, se presenta el marco teórico utilizado para responder la pregunta que motiva esta investigación, y en la tercera, se desarrolla el caso de aplicación, alcanzándose finalmente las conclusiones.

2. Planteamiento del problema y mecanismo de solución

El problema consiste en la valuación de la garantía que el Estado extiende a favor del operador de una concesión, de acuerdo a la siguiente lógica:

1. El operador de la concesión, a lo largo del horizonte contractual, obtiene ingresos cuyo comportamiento es aleatorio (Y_t). Estos ingresos se liquidan en intervalos temporales (semestrales, anuales, etc.) estipulados en el contrato.

2. Cada vez que los ingresos sean liquidados a lo largo del periodo de concesión, el Estado garantiza al operador un ingreso mínimo (IMG_t) establecido ex-ante.

3. Si eventualmente los ingresos liquidados en cada intervalo temporal estuvieran por debajo del nivel garantizado, i.e. $Y_t < IMG_t$, el Estado se halla en la obligación de cubrir el monto que falta para completar el ingreso mínimo garantizado ($IMG_t - Y_t$).

Para aproximarse a la resolución de tal problema puede seguirse a Merton [9].

Dicho autor considera que, siendo el valor de una garantía de deuda asumida por una firma, isomorfo al valor de una opción de venta financiera Europea[2] (puesto que ambos valores tienen la misma estructura al vencimiento), todo el instrumental que se utiliza para valuar la referida opción de venta puede tambien utilizarse para valuar la garantía, dejando abierta la posibilidad de aplicar la fórmula de Black-Scholes para este efecto (si acaso la variable aleatoria asociada a la garantía sigue un comportamiento Browniano).

Como indica Merton [9], este isomorfismo se comprueba al comparar las siguientes ecuaciones:

$$V(\tau) = \text{máx}\{0, K - S\} \tag{1}$$

$$G(T) = \text{máx}\{0, B - V_f\} \tag{2}$$

Ambas tienen la misma estructura. Mientras (1) corresponde al valor de una opción de venta financiera Europea en la fecha de vencimiento τ, teniendo el activo subyacente

[2] Se recuerda que una opción de venta financiera Europea (con acciones como activo subyacente) es un derivado financiero o contrato que le otorga a su tenedor, el derecho de vender un número determinado de acciones a un precio acordado de antemano (llamado precio de ejercicio), en una fecha predefinida (llamada fecha de expiración o de vencimiento de la opción).

Si en la fecha de expiración $t = T$, el precio de cada acción, S, es mayor que el precio de ejercicio, K, estipulado en la opción, el tenedor de la opción no ejercerá su derecho a vender sus acciones a ese precio, pues puede obtener un precio mayor por ellas en el mercado, y en tal caso, la opción de venta no tendrá ningún valor. Pero, si por el contrario, en la fecha de expiración, el precio de mercado es menor que el precio de ejercicio, el propietario de la opción ejercerá su derecho a vender al precio acordado; consecuentemente el valor de la opción será la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio de la acción, $(K - S)$, multiplicado por el número de acciones especificadas dentro de la opción.

un precio de ejercicio K y un precio S en la indicada fecha, (2) por su parte, corresponde al valor de una garantía ofrecida por un tercero a una firma que ha asumido una deuda que valdrá B en la fecha de vencimiento T, y cuyo valor (el de la firma) será V_f al vencer la deuda.

En el caso específico de la concesión se observa que, al vencimiento t, el valor de la garantía que extiende el Estado será igual a: Cero (con lo cual Estado no desembolsa monto alguno), si el operador de la concesión observa que sus ingresos Y_t son mayores que los ingresos mínimos (IMG_t) garantizados por el Estado, no ejerciendo su derecho de opción de venta, o igual a $IMG_t - Y_t$ (el monto que desembolsa el Estado), si el operador observa que Y_t es menor a IMG_t, ejerciendo su derecho a que el Estado le compense lo faltante.

Esto es, $G(t)$ formalmente será igual a:

$$G(t) = \max\{0, IMG_t - Y_t\} \tag{3}$$

Con lo cual se concluye (siguiendo a Merton [9]) que, siendo (3) isomorfa a (1), para resolver el problema puede suponerse que el Estado al conceder la garantía de la concesión, está en la práctica emitiendo n opciones de venta Europeas [3] con vencimientos de intervalos temporales iguales a cada unidad de tiempo en que el operador liquida sus ingresos, y en tal sentido, el valor de la garantía del Estado es igual al valor de las referidas opciones de venta (como si éstas fueran financieras), el mismo que puede determinarse aplicando la fórmula de Black-Scholes o la generalización de Merton [8] si fuera el caso.

3. Marco teórico

El objetivo de esta sección es presentar el marco en el que surgen las fórmulas de valuación de opciones que serán utilizadas para resolver el problema propuesto. En primer lugar se procede a una revisión de la fórmula de Black y Scholes [1], que como es conocido se aplica en un entorno de movimiento Browniano, y a continuación se revisa la fórmula de Merton [8] que es aplicada más bien en un entorno de saltos con difusión[4].

En ambos casos, el contexto en el que se desarrolla la deducción de las fórmulas corresponde al de opciones financieras que tienen como activo subyacente a acciones.

3.1. Fórmula de Black-Scholes-Merton

A pesar de tener supuestos no realistas, la fórmula de Black-Scholes resulta ser la más usada para valuar opciones dada su simplicidad de cálculo, lo cual ocurre debido fundamentalmente al supuesto adoptado o verificado de que el precio de las acciones sigue un movimiento Browniano (o paseo aleatorio continuo), proceso estocástico continuo básico que se define de la siguiente manera:

Definición 3.1 (Movimiento Browniano) *Un proceso Wiener o movimiento Browniano es un proceso estocástico $W(t)$ real valuado y definido $\forall t \in [0, \infty)$, tal que:*

1. $W(0) = 0$, *c.s.*

[3] En este caso el contrato de la concesión funge como el activo subyacente, los ingresos estocásticos (Y) de la misma cumplen el rol del precio de la acción, y los ingresos mímimos garantizados por el Estado, IMG, corresponden al precio de ejercicio.

[4] Ambos procesos pertenecen a la familia de procesos llamados Lévy. Para una revisión detallada y mas profunda de estos procesos aplicados a Finanzas, veáse Cont y Tankov [3].

2. Los caminos muestrales $t \mapsto W(t)$ son continuos c.s.

3. $W(t)$ tiene distribución Normal con media 0 y varianza t, i.e. $W(t) \sim N(0,t)$.

Como consecuencia de esta definición, se tiene que:

1. $\forall\ 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m$, los incrementos $W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$ son independientes, y

2. $W(t_{i+1}) - W(t_i)$ tienen distribución Normal con media 0 y varianza $t_{i+1} - t_i$

Como se advierte, la consideración más importante del movimiento Browniano es que tanto la variable aleatoria con esta dinámica como sus diferencias, tienen una distribución normal en cada instante, siendo éstas además independientes, con lo que puede afirmarse que este movimiento es lo más parecido a un ruido.

Basado en este proceso es que Samuelson [10] plantea la siguiente ecuación diferencial estocástica para calcular el retorno de una acción en cualquier instante t:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \tag{4}$$

donde, $S(t)$ es el precio de la acción en el instante t, μ es la media de los retornos de la acción, σ es asimismo la desviación estándar de los retornos de la acción, y $W(t)$ es el componente Browniano.

La solución de esta ecuación, denominada Movimiento Geométrico Browniano, es:

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)} \tag{5}$$

la cual puede reescribirse como:

$$ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) \tag{6}$$

Así, según (4), el retorno de una acción (medido por $\frac{dS(t)}{S(t)}$) tiene por tanto una dinámica con dos componentes, uno determinístico (una tendencia regida por la media μ), y otro estocástico que es proporcional a la variación Browniana. Y, según (5) o (6) es posible determinar el precio $S(t)$ o el log-retorno correspondiente en el instante t, lo que permite consecuentemente estar en condiciones de valuar una opción de venta Europea de la acción cuyo precio $S(t)$ posee la dinámica descrita.

Teniendo en cuenta (1) y asumiendo que en la fecha de expiración t el precio $S(t)$ es mayor que el precio de ejercicio K, el valor de una opción de compra Europea[5] será igual a:

$$C = e^{-rt}E[S(t) - K] \tag{7}$$

Lo que implica traer a valor presente ($t = 0$), con r igual a la tasa libre de riesgo, el valor esperado de la opción a su vencimiento.

Si se adoptan los supuestos de Black y Scholes [1][6](como ellos mismos señalan, para efectos de concentrarse en lo fundamental), se reemplaza (5) en (7) y se considera asimismo

[5]La idea es la misma que la de una opción de venta. En este caso, el derecho que se adquiere es el de compra. Si el precio de ejercicio es menor que el precio de la acción, entonces ejercemos nuestro derecho de compra a menor precio.

[6]Estos supuestos son:

S.1 La tasa de interés de corto plazo es conocida y constante a través del tiempo.

que $W(t) = Z\sqrt{t}$, teniendo Z una distribución Normal con media 0 y varianza 1, i.e. $Z \sim N(0,1)$, se tiene entonces que el valor de esta opción de compra Europea es igual a:

$$\begin{aligned}
C_{BS} &= e^{-rt} E\left[S(0)e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma W(t)} - K\right] \\
C_{BS} &= e^{-rt} E\left[S(0)e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma Z\sqrt{t}} - K\right] \\
C_{BS} &= \frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[S(0)e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma x\sqrt{t}} - K\right] e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (8)
\end{aligned}$$

Resolviendo el término entre corchetes de (8), de modo que $C_{BS} \geq 0$. Esto es, igualando el término entre corchetes a cero y reemplazando x por a, se tendrá:

$$a = \frac{ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad (9)$$

con lo que (8) puede reescribirse así:

$$C_{BS} = \frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} \left[S(0)e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma x\sqrt{t}} - K\right] e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}
C_{BS} &= \frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} \left[S(0)e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma x\sqrt{t}}\right] e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{e^{-rt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{a}^{\infty} K e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
C_{BS} &= S(0) \int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma x\sqrt{t}-\frac{x^2}{2}} dx - e^{-rt}K \int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
C_{BS} &= S(0) \int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\sigma\sqrt{t})^2}{2}} dx - e^{-rt}K \int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (11)
\end{aligned}$$

y efectuando el cambio de variable $y = (x - \sigma\sqrt{t})$, con lo que $b = a - \sqrt{t}$, se tiene que la última ecuación queda de la siguiente manera:

$$C_{BS} = S(0) \int_{b}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - e^{-rt}K \int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (12)$$

además, reemplazando $d_1 = a - \sigma\sqrt{t}$ y $d_2 = -a$, se llega finalmente a:

$$C_{BS} = S(0)N(d_1) - e^{-rt}KN(d_2) \qquad (13)$$

resultando la conocida fórmula de Black-Scholes-Merton para una opción de compra Europea, con $N(\cdot)$ igual a la distribución acumulada normal estándar.

S.2 La varianza de los retornos de la acción es constante.

S.3 La acción no paga dividendos o alguna otra distribución.

S.4 No hay costos de transacción en la compra o venta de la acción o de la opción.

S.5 Es posible prestarse, a la tasa de interés de corto plazo, un monto equivalente a una fracción del valor de un activo financiero para comprarlo o para tenerlo.

S.6 No hay penalidades por ventas en corto. Un vendedor que no es propietario de un valor simplemente aceptará el precio de un comprador y convendrá con el mismo una fecha en la que le pagará un monto igual al del precio que tenga el valor en esa oportunidad.

Luego, considerando la hipótesis de paridad compra-venta de una opción[7]se concluye que el valor de la opción de venta Europea sobre acciones (V_{BS}) es igual a:

$$V_{BS} = Ke^{-rt}N(-d_2) - S(0)N(-d_1) \tag{14}$$

3.2. Fórmula de Merton para saltos con difusión

Como menciona Merton [8], el supuesto crítico de Black y Scholes es que la senda muestral del precio de la acción es continua, con probabilidad uno. Sin embargo, la evidencia empírica advierte que esta hipótesis no se sostiene puesto que no se tienen transacciones continuas (sino mas bien discretas), y aún cuando éstas pueden aproximarse a ser continuas, es común que el precio experimente saltos como consecuencia del ajuste que efectúa el mercado ante la llegada de nueva información.

En tal sentido, puede afirmarse que la dinámica Browniana de la acción vista en la sección anterior no se ciñe necesariamente a lo que la evidencia empírica señala, haciéndose necesario encontrar un proceso estocástico que se ajuste a los movimientos *"reales"* de la misma, los cuales indican que los precios parecen seguir aleatoriamente una evolución cercana al movimiento Browniano en algunas etapas (difusión) y una dinámica aleatoria de saltos en otras, combinación de movimientos a la que se denominará proceso de salto-difusión.

Para una mejor caracterización (y claro está, para una adecuada valuación de la opción) se precisa por tanto agregar al movimiento Browniano, los procesos que reflejen la dinámica de saltos que experimenta toda acción. Dichas fuentes de aleatoriedad contenidas en la evolución temporal del precio de la acción, y su correspondiente proceso estocástico, se resumen como sigue:

a) Paseo aleatorio continuo (Movimiento Browniano),

b) Número de saltos que ocurren por periodo (Proceso Poisson), y

c) Tamaño ó amplitud de los saltos (Proceso Poisson compuesto)

En esta sección se asume por tanto que la dinámica de la acción también viene caracterizada (adicionalmente a lo visto en la sección anterior) por procesos Poisson y Poisson compuesto, los cuales se detallan en seguida.

Sea $\tau_1, \tau_2, \ldots$ una secuencia de variables aleatorias independientes correspondientes a la oportunidad en que ocurren saltos, cada una con la misma distribución exponencial con parámetro λ. Se construye entonces un modelo en el cual un evento llamado *salto*, ocurre de rato en rato. El primer salto ocurre en el tiempo τ_1, el segundo ocurre τ_2 unidades de tiempo después, el tercero τ_3 unidades de tiempo a continuación del segundo salto, etc.

En tal sentido, las variables aleatorias τ_k corresponden a los intervalos de *interarribo* de los saltos y el tiempo de arribo del enésimo salto se define como:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$$

[7]Sea V el valor de la opción de venta sobre ciertas acciones y C el valor de una opción de compra sobre las mismas, entonces por la hipótesis de paridad compra-venta de una opción se obtiene la siguiente relación:

$$V = C + Ke^{-rt} - S(0).$$

Si se supone $\xi_0 = 0$ sin pérdida de generalidad, entonces el número de saltos hasta el tiempo $\xi_{n+1} > t \geq \xi_n$ es n. En este contexto, el conteo del número de saltos $N(t)$ hasta el tiempo t es un proceso Poisson, el mismo que se define de la siguiente manera:

Definición 3.2 (Proceso Poisson) *Decimos que $N(t)$, con $t \geq 0$ es un proceso Poisson con intensidad λ si*

$$N(t) = \text{máx}\{n : \ t \geq \xi_n\}.$$

Este proceso es continuo por derecha, con límite a la izquierda, no decreciente y constante entre dos variables ξ_k consecutivas.

Además, se tiene que todo $t \geq 0$ sigue una distribución Poisson com parámetro λt, y $\{N(t)\}$ tiene incrementos independientes y homógeneos: $N(t_n) - N(t_{n-1}),\ldots,N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_1)$ son variables aleatorias independientes para cualquier $t_1 < \ldots < t_n$ y $N(t) - N(s)$ y $N(t-s)$ tienen la misma distribución Poisson con parámetro $\lambda(t-s)$ para cualquier $t > s$.

Definición 3.3 (Proceso Poisson compuesto) *Un proceso Poisson compuesto $Q(t)$ con intensidad $\lambda > 0$ y distribución de saltos f es un proceso estocástico definido como*

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} J_i, \tag{15}$$

donde las magnitudes de los saltos J_i son variables aleatorias i.i.d. con distribución f, y $N(t)$ es un proceso Poisson con intensidad λ, independiente de $\{J_i\}_{i \geq 1}$.

En consecuencia, al incorporarse estos nuevos procesos, la ecuación diferencial estocástica (4) cambia por la siguiente:

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) + S(t-)dQ(t) \\ \frac{dS(t)}{S(t-)} &= \mu dt + \sigma dW(t) + dQ(t) \end{aligned} \tag{16}$$

donde $S(t-) = \text{lím}_{u \to t} S(u)$ cuando $u < t$. La solución de (16) viene dada por:

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} J_i} \tag{17}$$

Donde, $W(t)$ es el proceso Wiener estándar, $N(t)$ es el proceso Poisson con intensidad λ independiente de $W(t)$, y $J_i \overset{i.i.d}{\sim} N(m, \delta^2)$ independientes a su vez de $W(t)$ y $N(t)$.

En este caso μ es igual a:

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[e^{J_i} - 1] = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda[e^{m+\frac{\delta^2}{2}} - 1] \tag{18}$$

y si consideramos que el valor de la opción de compra, análogamente a lo visto en (7), es igual a:

$$C_M = e^{-rt}E[S(t) - K] \tag{19}$$

Aplicando (17) y (18) en (19) se tiene entonces lo siguiente:

$$C_M = e^{-rt} E\left[S(0)e^{\mu t+\sigma W(t)+\sum_{i=1}^{N(t)} J_i} - K\right]$$

$$C_M = e^{-rt} \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} E\left[S(0)e^{\mu_n t+\sigma_n W(t)+\sum_{i=1}^{n} J_i} - K\right]$$

$$C_M = e^{-rt} \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} E\left[S(0)e^{\mu_n t+\sigma_n W(t)} e^{\sum_{i=1}^{n} J_i} - K\right]$$

$$C_M = e^{-rt} \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} E\left[S(0)e^{nm+\frac{n\delta^2}{2}-\lambda t e^{\{m+\frac{\delta^2}{2}\}}+\lambda t} e^{\left(r-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)t+\sigma_n W(t)} - K\right]$$

$$C_M = e^{-rt} \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} E\left[S_n e^{\left(r-\frac{\sigma_n^2}{2}\right)t+\sigma_n W(t)} - K\right]$$

$$C_M = e^{-rt} \sum_{n\geq 0} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} C_{BS}(S_n, \sigma_n) \tag{20}$$

donde $\sum_{i=1}^{n} J_i \sim N(nm, n\delta^2)$, $S_n = S_0 e^{nm+\frac{n\delta^2}{2}-\lambda t e^{\{m+\frac{\delta^2}{2}\}}+\lambda t}$, $\sigma_n = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{t}$, y $C_{BS}(S_n, \sigma_n)$ es la valuación Black-Scholes de la opción de compra vista en la sección anterior con los parámetros S_n y σ_n, en lugar de $S(0)$ y σ.

Análogamente, por la hipótesis de paridad compra-venta se infiere el valor de la opción de venta.

4. Aplicación a una concesión vial

Teniendo como base las fórmulas vistas hasta ahora, en esta sección se presenta la metodología de valuación de garantías del Estado mas adecuada a una concesión[8] que cumple con la lógica señalada en la sección 2.

4.1. Revisión de isomorfismo

Siguiendo la metodología de valuación de una opción de venta, la garantía de la concesión vial seleccionada se adaptó de la siguiente manera:

1. Dado que el plazo total de la concesión vial analizada es de 30 años y que el Estado ofrece una garantía de ingresos mínimos con una periodicidad semestral ($IMSG_t$) a partir del segundo año de la concesión hasta el año 25 inclusive, la cantidad de semestres garantizados es 46, de modo que $T = \{1, \ldots, t, \ldots, 46\}$.

2. Como al finalizar cada $t - esimo$ semestre, durante 46 semestres, se liquidan los ingresos Y_t y estos se comparan en esa oportunidad con el $IMSG_t$, siendo dichas liquidaciones independientes unas de otras, se considera entonces que el Estado emite 46 opciones de venta Europeas asimismo independientes unas de otras.

3. En tal sentido, cada opción Europea tiene asociados un precio de ejercicio $IMSG_t$ y un semestre t de vencimiento, al final del cual el valor de esta opción es igual a $G_T = \max\{0, IMSG_t - Y_t\}$, siendo su valor actual por ende igual a $G(t) = e^{-rt}E[IMSG_t - Y_t]$.

[8]Dado que dicho proyecto actualmente se encuentra en etapa de estudio no nos es posible indicar el nombre del mismo.

4. Como r, t e $IMSG_t$ son variables conocidas, la solución de $G(t)$ consiste fundamentalmente en hallar la dinámica estocástica de Y_t.

5. Para hallar esta dinámica estocástica se precisa analizar la data asociada a Y_t y determinar el conjunto de parámetros de la misma (al cual se denotará como θ). Determinada la dinámica se tendrá entónces que $G(t) = f(Y_0, IMSG_t, t, \theta)$, siendo Y_0 los ingresos actuales de la concesión.

6. Así, finalmente el valor actual de toda la Garantía del Estado (V_E) será igual a la suma de los valores de las garantías de cada semestre (o de las opciones de venta Europeas), i.e. $V_E = \sum_{t=1}^{46} G(t)$, considerando que el costo de transacción inicial de la opción de venta emitida por el Estado es cero.

4.2. Acopio de data

Para determinar la dinámica estocástica que mejor reflejara el comportamiento de la serie $\{Y\}$, y para obtener a partir de ello tanto Y_0 como el conjunto θ de parámetros correspondiente, se consideró la hipótesis de que la dinámica de los ingresos de la concesión vial materia de estudio está fuertemente explicada por la serie de ejes vehiculares[9]. Se asumió ello, teniendo en cuenta dos aspectos: que la tarifa de peaje se establecerá contractualmente sobre eje vehicular (y no sobre unidad vehicular) y que a lo largo de la concesión, la tarifa, sin pérdida de generalidad, puede estimarse como plana.

En este contexto se acopió la data de la serie de ejes vehiculares de la concesión, correspondiente al periodo septiembre 2002 - julio 2006 con observaciones diarias.

4.3. Verificación de dinámica Browniana

En primer lugar se asumió que los ingresos estocásticos $\{Y\}$ siguen la dinámica más simple, la de un movimiento Browniano geométrico. Si ello se cumpliera, se esperaría que tanto la serie del logaritmo natural de los ingresos como sus diferencias, tuvieran ambas sólo un comportamiento estable de paseo aleatorio continuo; y más aún, se esperaría que sus funciones de densidad fueran Normales. Sin embargo ello no se cumple en nuestra serie.

En el gráfico izquierdo de la Figura 1, se aprecia por ejemplo que la serie del logaritmo natural de los ingresos tiene un comportamiento estable de paseo aleatorio pero acompañado de saltos, y lo mismo ocurre con las diferencias de ésta, cuya evolución se muestra en el gráfico contigüo.

En la Figura 2 que corresponde a los histogramas de las funciones de densidad del logaritmo de ingresos y de sus diferencias, se observa asimismo que ambas muestran una forma leptocúrtica con colas anchas como evidencia de la presencia de saltos dentro de la serie. Este resultado que intuitivamente podría obtenerse de la Figura 1 se corrobora cuantitativamente midiendo los excesos de curtosis de ambas distribuciones. Así, para el primer histograma se obtiene un exceso de curtosis de 7,29, mientras que para el segundo se obtiene 14,77, difiriendo claramente dichas distribuciones de la Normal.

En tal sentido arribamos a la conclusión que, habiéndose falseado la hipótesis de que $\{Y\}$ sigue un comportamiento Browniano geométrico, no es posible aplicar la fórmula de Black-Scholes para valuar $G(t)$.

[9] Aún cuando la data seleccionada no correspondió exactamente a la de los ingresos de la concesión, debe advertirse que ésta representa una base de análisis válida, puesto que nuestro objetivo es el de plantear una metodología y no el de presentar resultados cuantitativos.

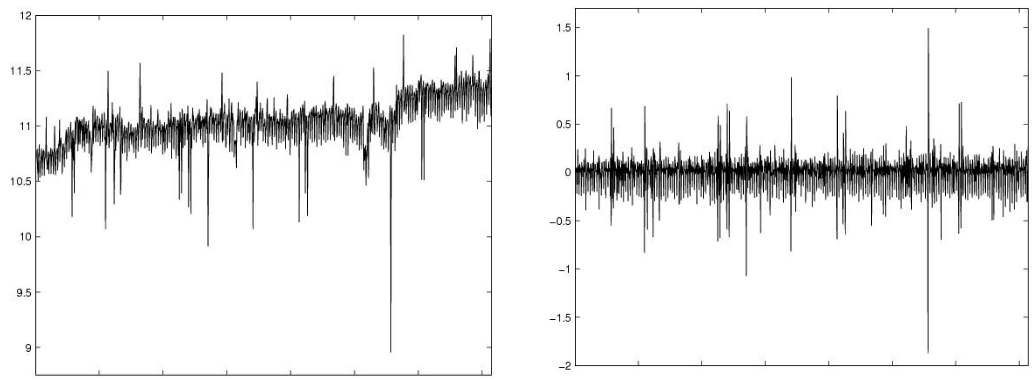

Figura 1: Logaritmo natural del ingreso por peajes y diferencias.

Esta comprobación cuestiona por tanto el trabajo de Wibowo [12], quien asume directamente que la serie que modela los ingresos en concesiones viales sigue un movimiento Browniano geométrico.

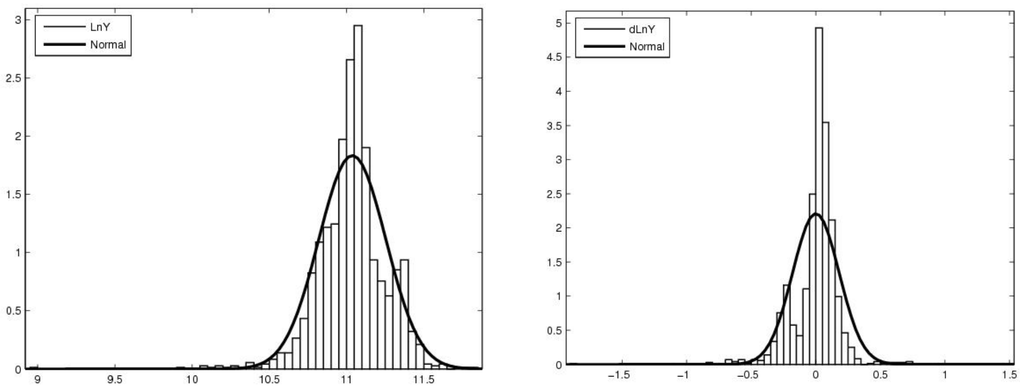

Figura 2: Histogramas del logaritmo natural de los ingresos y sus diferencias.

4.4. Verificación de dinámica salto-difusión

En la medida que se constató que la serie no puede ser modelada con un movimiento Browniano o proceso Wiener, y consecuentemente no es posible la utilización de la fórmula de Black-Scholes, se aplicó a continuación el modelo de Merton [8].

En tal sentido, se procedió a verificar si la serie de los ingresos por peaje $\{Y\}$ sigue un proceso de salto-difusión geométrico, de acuerdo a lo formulado en (17).

Para este efecto, se procedió a dividir la serie en dos componentes: a) camino aleatorio continuo (movimiento Browniano) y b) saltos, los cuales se definen como sigue:

Definición 4.1 (Salto y amplitud de salto) *Sea una variable aleatoria $X(t)$, $x(t)$ su logaritmo natural y $dx(t) := x(t) - x(t-1)$ sus diferencias, y μ^+ y σ^+, el promedio y desviación estándar de los incrementos de $x(t)$, y análogamente, μ^- y σ^-, de sus decrementos; se dice que $x(t)$ presenta un salto en t si:*

$$\begin{aligned} dx(t) &> \mu^+ + \sigma^+, \qquad \forall dx(t) > 0; \\ dx(t) &< \mu^- - \sigma^-, \qquad \forall dx(t) < 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Asimismo, si el salto existe, $dx(t)$ es llamado amplitud del salto.

El componente Browniano se construyó reemplazando los saltos por la media de las amplitudes respectivas, manteniendo intacta el resto de la serie. Mientras que el componente de saltos de la serie se obtuvo aplicando la definición. Como se conoce, el conteo de estos corresponden a un proceso Poisson $N(t)$, a partir del cual, sumando las amplitudes, puede obtenerse a su vez un proceso Poisson compuesto.

Con ello se logró descomponer la serie, según se puede apreciar en la Figura 3.

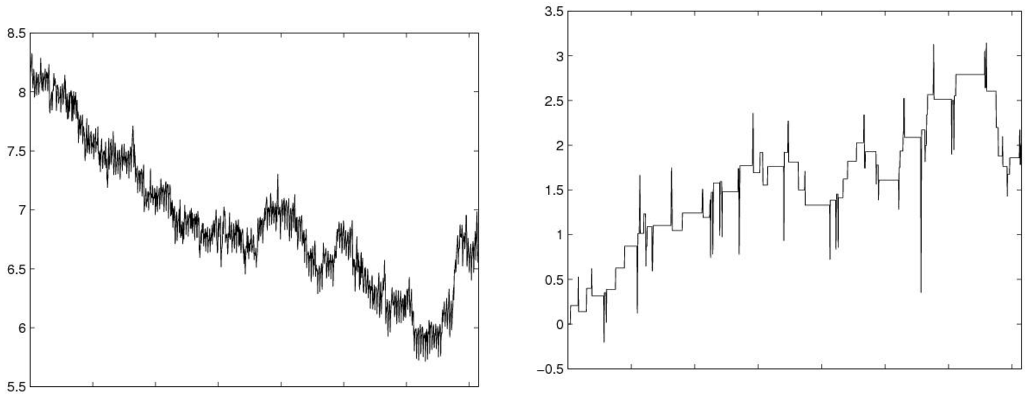

Figura 3: Movimiento Browniano y Poisson compuesto del flujo de vehículos

Para tener la certeza de que el modelo de salto-difusión propuesto es conveniente para modelar la dinámica de la serie, se procedió a continuación a verificar que cada uno de los procesos que la componen cumpliera con los correspondientes supuestos.

En tal sentido:

a) Con el ajuste de las variables, se verificaron correcciones en las curtosis y asimetría del componente Browniano. Tal como se observa en la Figura 4, cada histograma arrojó resultados de curtosis de 2,59 y 3,32, y asimetría de 0,38 y −0,95, respectivamente, los cuales son cercanos a los de una distribución Normal.

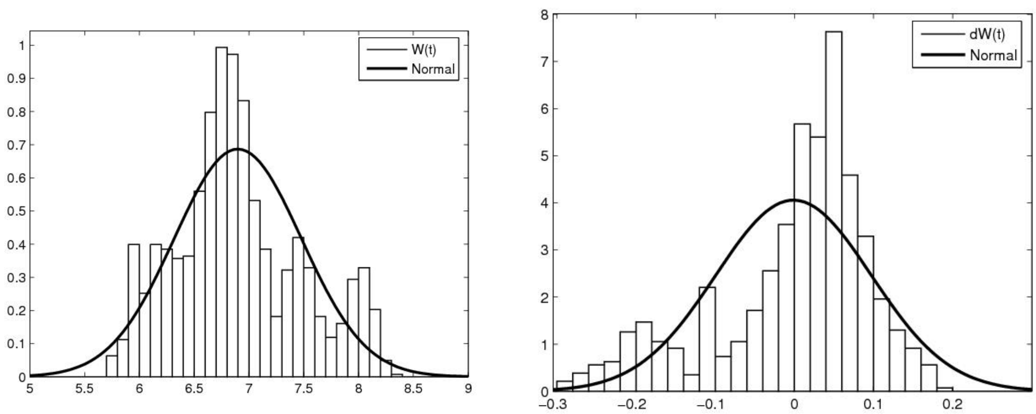

Figura 4: Histograma del movimiento Browniano del flujo de vehículos, y sus diferencias.

b) Se verificó asimismo que las amplitudes de los saltos tienen una distribución Normal con una curtosis de 3,59 y un coeficiente de asimetría de −0,57 tal como se aprecia en la Figura 5.

c) Y se verificó que los tiempos de interarribo por su parte mostraban una distribución exponencial y que el conteo de saltos evidenciaban una distribución Poisson, como se observa en la Figura 6. Cabe señalar sin embargo que esta distribución se obtuvo con observaciones mensuales y no semestrales (como debiera ser), dado que no se tuvo datos suficientes en esta base temporal. A pesar de ello, es posible constatar que la estimación es correcta, pues, sabiendo que la media del tiempo de interarribo $E[\tau]=\frac{1}{\lambda}=12{,}51$[10] se obtiene $\lambda=0{,}079$[11], el cual multiplicado por 180 (λt) resulta igual a 14,87, valor muy cercano a los 14,57 saltos promedio semestral que arroja realmente la serie. El único error notado fue que la varianza no resultó igual a la media, como corresponde a una distribución Poisson.

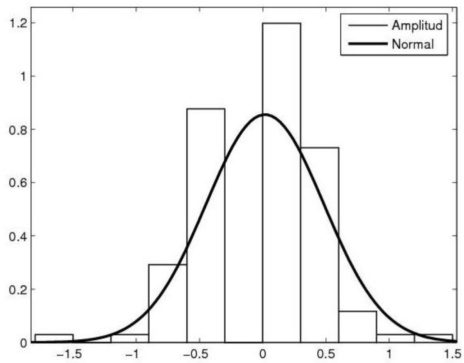

Figura 5: Histograma de la amplitud del salto.

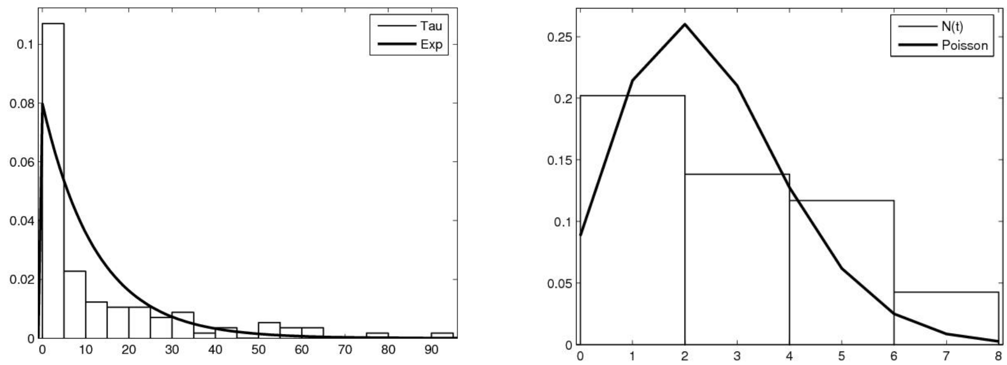

Figura 6: Histograma del tiempo de interarribo y proceso de conteo de los saltos.

Con la limitación señalada, arribamos a la conclusión que la dinámica de $\{Y\}$ verifica las hipótesis de un proceso de salto-difusión y con ello es posible aplicar la fórmula de Merton [8] para valuar la garantía del Estado.

4.5. Resumen de Resultados

Con el análisis previo se obtuvieron los parámetros que se muestran en el Cuadro 1, los cuales se utilizaron para resolver las correspondientes fórmulas.

Al respecto, debe anotarse lo siguiente:

[10] El tiempo entre salto y salto es de 12 días y medio aproximadamente.

[11] La intensidad de los saltos es de 0,079 saltos por día.

Black-Scholes	Merton
$Y(0) = 5,819,598.60$	
$r = 0.048,\ r' = 0.060$	
$\sigma_1 = 2.9161$	$\sigma_2 = 6.3302$
	$\lambda = 0.0785$
	$m = 0.0004$
	$\delta = 0.4692$

Cuadro 1: Parámetros usados

1. Si bien ambos modelos comparten el mismo valor de t, $Y(0)$, r e $IMSG(t)$, las desviaciones estándar σ_1 y σ_2 son distintas puesto que en el modelo de Merton este parámetro se estimó con la serie limpia de saltos,

2. Como ya se indicó, el valor de λ fue aproximado con la variable τ,

3. Dado que $\{Y\}$ no es una serie financiera, no se cumple que la media de los retornos sea igual al rendimiento de un activo libre de riesgo, y por ello se decidió mantener su valor en r'.

Finalmente, al aplicarse los parámetros de Black-Scholes en la ecuación (14), aún cuando se conoce que la serie no verifica una dinámica de movimiento Browniano geométrico, se obtuvo un valor de la garantía[12] que se denotará por $V_E^{BS} = 1{,}0002X$, y al aplicarse los parámetros en el modelo de Merton [8] (que como ya se indicó, si se ajusta a la serie de la concesión vial analizada) se obtuvo que el valor de la garantía del Estado era $V_E^M = X$.

Estos resultados, casi iguales, llaman la atención dado que se esperaba que el modelo "inadecuado" de Black-Scholes arrojará un resultado muy diferente al modelo "adecuado" de Merton. La explicación de esta similitud viene dada por el valor tan pequeño que tiene la media de la amplitud de los saltos ($m = 0{,}0004$), lo que lleva a inferir que los saltos positivos de la serie con los negativos se anulan entre sí en la fórmula de Merton, quedando sólo el efecto Browniano.

5. Conclusiones

Las principales conclusiones son las siguientes:

[1] El modelo mas adecuado para capturar la dinámica de la serie de ingresos de la concesión vial materia de análisis es el de saltos con difusión, y en tal sentido la fórmula adecuada para resolver la valuación de la garantía en este contexto es la que plantea Merton [8].

[2] Un caso especial de Merton [8], es cuando la amplitud de los saltos, que verifican una distribución Normal, tienen media cercana a cero. En esta circunstancia la fórmula de Black y Scholes [1] puede ser aplicada siempre que se verifique previamente en la serie, la referida dinámica de saltos con difusión.

[3] Una mejora en el modelo de Merton [8] es el que propone Kou [5] (modelo que no se ha desarrollado en el presente trabajo y que forma parte de nuestra futura agenda), al tratar la amplitud de los saltos con distribución doble exponencial, analizando separadamente los saltos negativos de los positivos.

[4] Temas de nuestra futura agenda son también: a) el tratamiento de la serie como un proceso de actividad infinita y b) la incorporación de la volatilidad estocástica.

[12] Ya indicamos que no nos es posible revelar este valor.

Referencias

[1] Black, F. y M. Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3 (mayo-junio), pp. 637-654.

[2] Brzeźniak y Zastawniak (1998): *Basic Stochastic Processes.* Springer-Verlag, Londres.

[3] Cont, R. y P. Tankov (2004): *Financial Modelling with Jump Processes.* Chapman y Hall/CRC, Londres.

[4] M. Hammami, J. Ruhashiyankyko. y E. Yehoue (2006) "Determinants of Public-Private Partnership in Infrastructure". *IMF Working Papers* (abril), WP/06/99.

[5] Kou, S. (2002): "A Jump-diffusion Model for Option Pricing". *Managament Science*, Vol. 48, No. 8 (agosto), pp. 1086-1101.

[6] Lai, V.S. y M. Gendron (1994): "On Valuation of Loan Guarantees Under Stochastic Interest Rates". *4th AFIR International Colloquium*, pp. 1013-1046.

[7] Merton, R. (1973): "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Managament Science*, Vol. 4, No. 1 (primavera), pp. 141-183.

[8] Merton, R. (1976): "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1/2 (enero/marzo) pp. 125-144.

[9] Merton, R. (1977): "An Analytic Derivation of the Cost of Deposit Insurance and Loan Guarantees". *Journal of Banking and Finance*, Vol.1, No. 1 (junio), pp. 3-11.

[10] Samuelson, P. (1965): "Rational Theory of Warrant Prices". *Industrial Management Review*, Vol. 6, No. 2 (primavera), pp. 13-31.

[11] Shreve, S. (2003): *Stochastic Calculus for Finance II.* Springer, New York.

[12] Wibowo, A. (2004): "Valuing Guarantees in a BOT Infrastructure Project". *Engineering, Construction and Architectural Management*, Vol. 11, No. 6, pp. 395-403.