Valuación de garantías del Estado a concesiones con ingresos estocásticos

Francisco Velásquez y Víctor del Carpio

Diciembre 14, 2006

Contenido

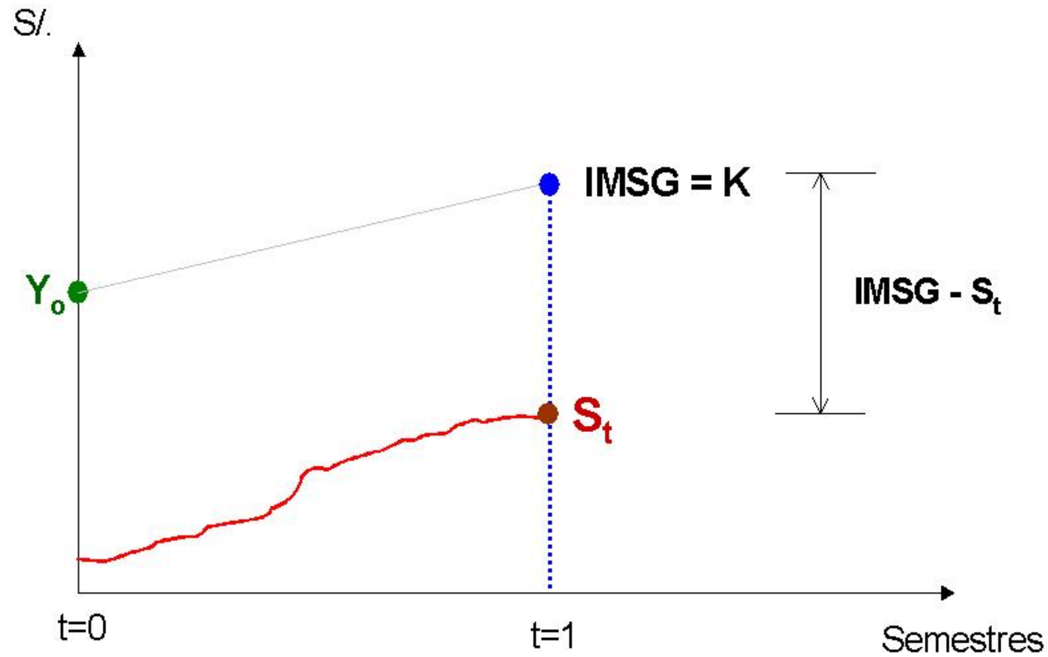
- Planteamiento del problema
- Alternativas de solución
- Aplicación
- Conclusiones y agenda pendiente

Planteamiento del problema

- En $t = 1$, el valor de una opción de venta es:

$$P = \text{máx}\{0, K - S\}$$

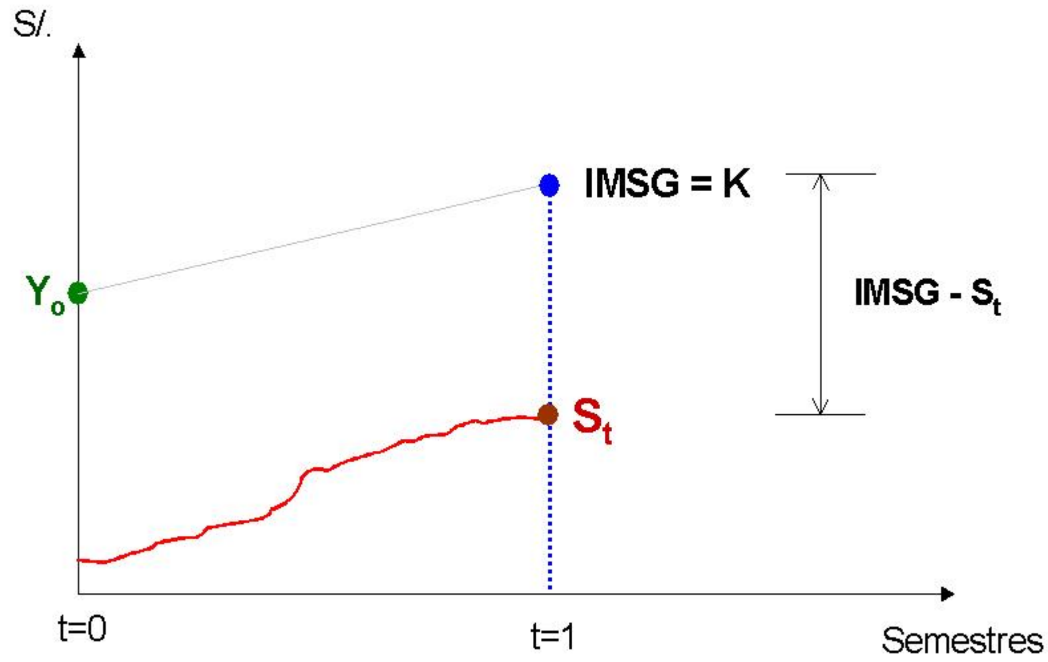
- En $t = 1$, el valor de la Garantía es: $G = \text{máx}\{0, IMG - S\}$



Planteamiento del problema

Por tanto: La valuación de G es isomorfa a P.[a]

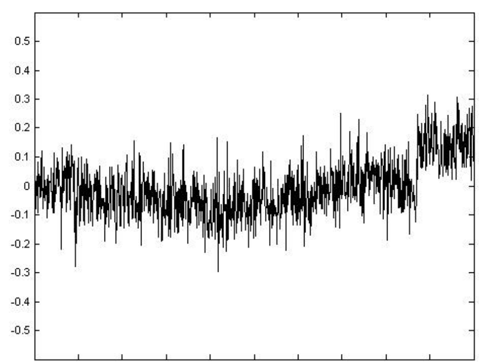
El problema es ¿cómo modelar S(t)?

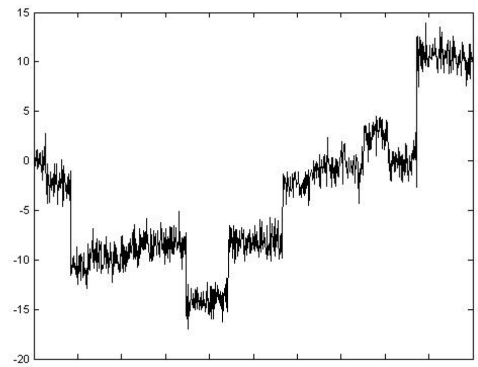


[a]Merton, R. (1977): "An Analytic Derivation of the Cost of Deposit Insurance and Loan Guarantees". *Journal of Banking and Finance*, Vol.1, No. 1 (junio), pp. 3-11.

Alternativas de solución

Proceso estocástico	Fórmula de valuación
Movimiento Browniano	Black y Scholes (1973)[a]
Salto-difusión (amplitudes distribuídas normalmente)	Merton (1976)[b]





[a]Black, F. y M. Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3 (mayo-junio), pp. 637-654.

[b]Merton, R. (1976): "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous". *Journal of Financial Economics*, Vol. 3, No. 1/2 (enero/marzo) pp. 125-144.

Alternativas de solución

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \tag{1}$$

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)} \tag{2}$$

Queremos $C = e^{-rT}E[S(T) - K]$

$$C_{BS} = S(0)\phi(d_1) - e^{-rT}K\phi(d_2) \tag{3}$$

con

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{K}{S(0)}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{4}$$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$ y $\phi(\cdot)$ distribución acumulada normal estándar.

$$V_{BS} = Ke^{-rT}\phi(-d_2) - S(0)\phi(-d_1) \tag{5}$$

Alternativas de solución

- τ_k secuencia v.a. independientes con distrib. exponencial de parámetro λ; $\xi_n = \sum_{k=1}^{n} \tau_k$
- $N(t) = \text{máx}\{n : \ t \geq \xi_n\}$ sigue distrib. Poisson com parámetro λt.
- $Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ con Y_i v.a. i.i.d. con distrib. f.

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + dQ(t) \tag{6}$$

$$S(t) = S(0) e^{\mu t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i} \tag{7}$$

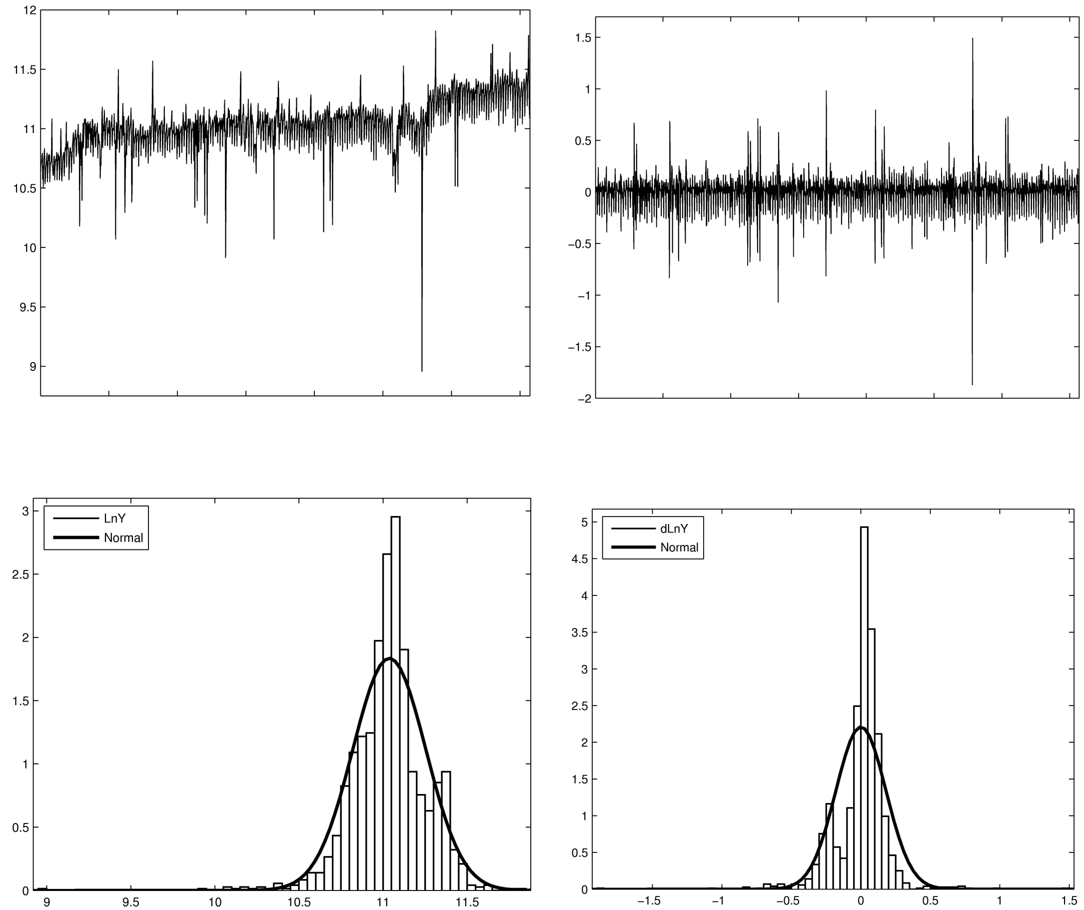
$$C_M = e^{-rT} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} C_{BS}(S_n, \sigma_n) \tag{8}$$

con $S_n = S_0 e^{nm + \frac{n\delta^2}{2} - \lambda T e^{m + \frac{\delta^2}{2}} + \lambda T}$ y $\sigma_n = \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{T}$

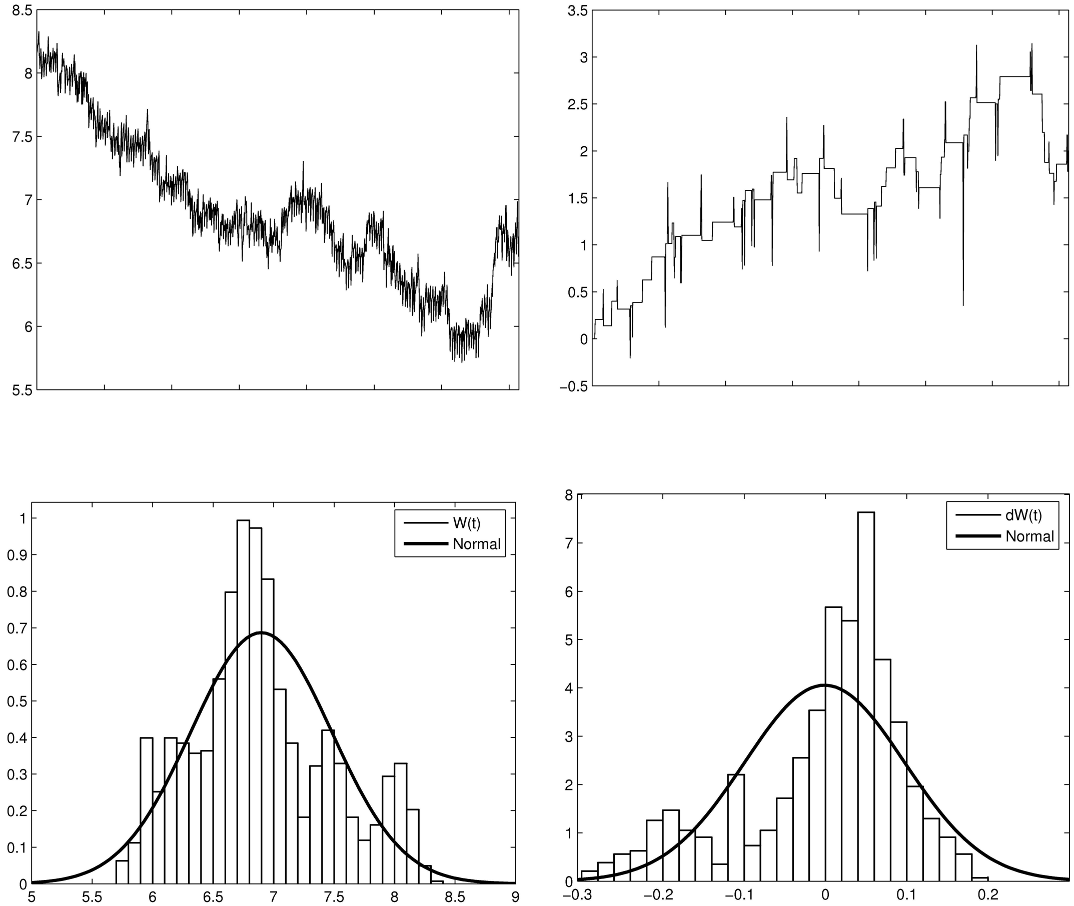
Aplicación

1. Concesión es de 30 años
2. Garantía de ingresos mínimos semestrales
3. Aquellos semestres en los que ingreso obtenido por el cobro de peajes sea inferior al mínimo garantizado, el Estado deberá desembolsar la diferencia a favor del concesionario.
4. Cada garantía será tomada independientemente como opción de venta Europea
5. Siendo una garantía $G(t)$ de ingresos mínimos, los ingresos por peaje $Y(t)$ cumplen el rol de del precio de las acciones $S(t)$ y el $IMSG$ el del precio de ejercicio K

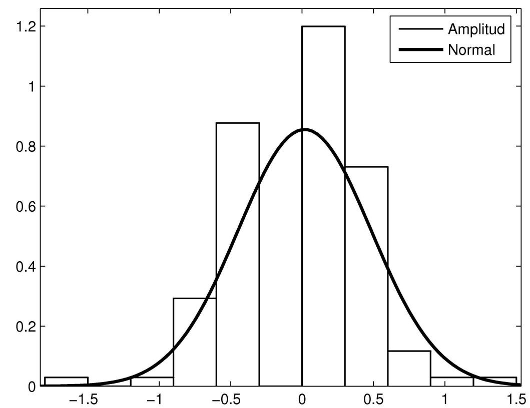
Aplicación

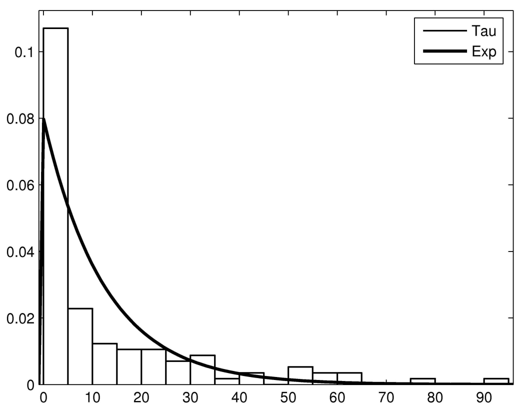

12
11.5
11
10.5
10
9.5
9
1.5
1
0.5
0
−0.5
−1
−1.5
−2
LnY
Normal
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
9
9.5
10
10.5
11
11.5
dLnY
Normal
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5

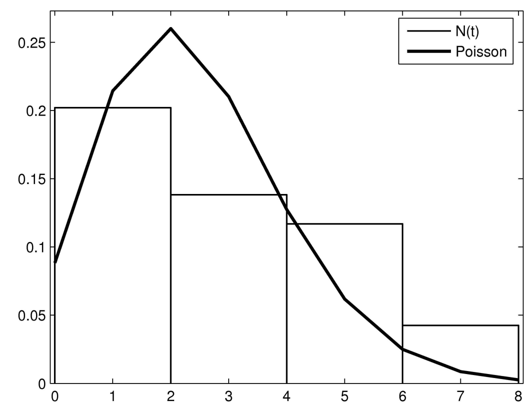
Aplicación



Aplicación







Conclusiones y agenda pendiente

- Resultados son similares. Formula incorrecta (BS) predice resultados correctos.
- En Merton, saltos pierden relevancia en estimación si la media tiende a 0. Se hace necesario uso de otra distribución (salto difusión distrib. doble exponencial).[a]

[a] Kou, S. (2002): "A Jump-diffusion Model for Option Pricing". *Management Science*, Vol. 48, No. 8 (agosto), pp. 1086-1101