

# Aplicación de Tres Métodos Alternativos para Identificar Fluctuaciones Económicas en Perú

Gabriel Rodríguez

Universidad de Ottawa  
Banco Central de Reserva del Perú

XXIV Encuentro de Economistas del Banco Central de Reserva del Perú  
Diciembre 13-15, 2006

## Introducción

- Fluctuaciones económicas.
- Asimetrías y no linealidades.
- Diversas aproximaciones:
  - Ajustar una tendencia lineal o cuadrática y calcular los ciclos como residuos;
  - Componentes no observados (Watson, 1986);
  - Uso de filtros (Hodrick y Prescott, 1997; Baxter y King, 1995);
  - Modelos Markov-switching (Hamilton, 1989);
  - Modelos de transition suave (STAR) (Teräsvirta, 1994);
  - Aproximación tradicional: Oficina Nacional de Investigación Económica (NBER).
- Esta investigación: aplicación de tres métodos para identificar fluctuaciones en la economía peruana.
- Resultados:
  - Fuerte rechazo de la hipótesis de linealidad.
  - Presencia de asimetrías.
  - Identificación de recesiones.

### Especificación del Modelo *Plucking*

- Sea  $y_t$  una variable que denota el logaritmo del producto (output) real en el periodo  $t$ . Siguiendo la literature sobre componentes no observados (ver Watson, 1986), es posible descomponer  $y_t$  en un componente permanente (tendencia: $\tau_t$ ) y un componente transitorio (ciclo: $c_t$ ). Esto significa:

$$y_t = \tau_t + c_t. \quad (1)$$

- Asumimos que el componente transitorio está afectado por dos tipos de choques que son denotados por  $\pi_{s_t}$  y  $u_t$ . Esto permite tomar en cuenta los cambios de regimen o desviaciones asimétricas de la variable  $y_t$  respecto de su nivel tendencial.
- En términos formales, el componente transitorio y los choques que lo afectan están especificados de la siguiente manera:

$$c_t = \phi_1 c_{t-1} + \phi_2 c_{t-2} + u_t^*, \quad (2)$$

$$u_t^* = \pi_{s_t} + u_t, \quad (3)$$

$$\pi_{s_t} = \pi s_t, \quad (4)$$

$$u_t \sim N(0, \sigma_{u,s_t}^2), \quad (5)$$

$$\sigma_{u,s_t}^2 = \sigma_{u,0}^2(1 - s_t) + \sigma_{u,1}^2 s_t, \quad (6)$$

$$s_t = 0, 1 \quad (7)$$

donde  $\pi \neq 0$ .

- En la anterior especificación:
  - El término  $u_t$  es el choque simétrico usualmente modelizado.
  - El término  $\pi_{s_t}$  es un choque asimétrico y discreto. Dicho choque es dependiente de la variable no observada  $s_t$  la cual es una variable indicadora que determina la naturaleza de los choques a la economía.
  - Cuando la economía está cerca del nivel potencial (o nivel tendencial), el periodo puede llamarse un periodo normal. En este caso,  $s_t = 0$  lo cual implica que  $\pi_{s_t} = 0$ . En la situación opuesta, la cual puede denominarse un periodo de recesión, la economía es afectada por un choque transitorio con un probable signo negativo, esto es,  $\pi_{s_t} = \pi < 0$ . En este caso, choques de diverso tipo mueven a la economía hacia abajo.
- La variable  $s_t$  evoluciona de acuerdo a un proceso de Markov de primer orden tal como propuesto por Hamilton (1989). Esto es:

$$\begin{aligned} \Pr[s_t = 1 | s_{t-1} = 1] &= q \\ \Pr[s_t = 0 | s_{t-1} = 0] &= p. \end{aligned}$$

- Respecto al componente permanente, Friedman (1993) denominó a éste “*the ceiling maximum feasible output*” (output potencial). Friedman (1993) ha sugerido que dicho componente puede ser aproximado por una marcha aleatoria. En este caso, cualquier tipo de choque puede producir movimientos en este componente. En términos formales tenemos:

$$\tau_t = g_{t-1} + \tau_{t-1} + v_t, \quad (8)$$

$$g_t = g_{t-1} + w_t, \quad (9)$$

$$v_t \sim N(0, \sigma_{v,s_t}^2), \quad (10)$$

$$w_t \sim N(0, \sigma_w^2), \quad (11)$$

$$\sigma_{v,s_t}^2 = \sigma_{v,0}^2(1 - s_t) + \sigma_{v,1}^2 s_t, \quad (12)$$

donde, de acuerdo con (10) y (11), el componente permanente  $\tau_t$  está sujeto a choques al nivel y a la tasa de crecimiento. Dichos choques son llamados  $v_t$  y  $w_t$ , respectivamente.

- El modelo *Plucking* engloba al modelo propuesto por Clark (1987).

- El modelo *Plucking* puede ser escrito en forma de espacio estado. La llamada ecuación observacional (“*observation equation*”) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 y_t &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_t \\ c_t \\ c_{t-1} \\ g_t \end{bmatrix} \\
 &= H\xi_t,
 \end{aligned} \tag{13}$$

mientras que la ecuación estado (“*state equation*”) es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \xi_t &= \begin{bmatrix} 0 \\ \pi_{s_t} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \phi_1 & \phi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xi_{t-1} + \begin{bmatrix} v_t \\ u_t \\ 0 \\ w_t \end{bmatrix} \\
 &= \bar{\mu}_{s_t} + F\xi_{t-1} + V_t
 \end{aligned} \tag{14}$$

donde  $E(V_t V_t') = Q_{s_t}$  y

$$Q_{s_t} = \begin{bmatrix} \sigma_{v,s_t}^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \sigma_{u,s_t}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_w^2 \end{bmatrix}.$$

### El Modelo *Markov Switching*

- Sea  $\Delta y_t$  la tasa de crecimiento del output real en el periodo  $t$ . En una importante investigación, Hamilton (1989) propuso el siguiente modelo para analizar las fluctuaciones económicas en los EEUU:

$$\Delta y_t - \mu_{s_t} = \phi_1(\Delta y_{t-1} - \mu_{s_{t-1}}) - \dots - \phi_4(\Delta y_{t-4} - \mu_{s_{t-4}}) + u_t, \quad (15)$$

donde  $s_t$  es una variable no observada indicando el estado de la economía. Además:  $u_t \sim i.i.d. N(0, \sigma^2)$ .

- Una descripción completa de la dinámica de  $\Delta y_t$  es obtenida luego de establecer una descripción probabilística de la manera cómo la economía cambia de un regimen a otro.
- El modelo más sencillo para hacer lo anterior es lo que se llama una cadena de Markov. Este es un modelo donde

$$\begin{aligned} \Pr[s_t = j | s_{t-1} = i, s_{t-2} = k, \dots, y_{t-1}, y_{t-2}, \dots] &= \Pr[s_t = j | s_{t-1} = i] \\ &= p_{ij} \end{aligned}$$

con  $\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, M\}$ .

- En otros términos, tenemos la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1M} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M1} & p_{M2} & \dots & p_{MM} \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde  $p_{iM} = 1 - p_{i1} - p_{i2} - \dots - p_{iM-1}$ , para  $i = 1, 2, \dots, M$ .

- En el modelo especificado en (15) sólo el valor de la media es dependiente del regimen. Este modelo es también denotado como MSM(2)-AR(4) el cual indica un modelo *Markov switching* con media dependiente del regimen, dos regimenes y cuatro retardos en la parte autoregresiva.
- En general podemos tener un modelo MSMAH( $m$ )-AR( $k$ ) donde  $m$  indica el número de regimenes y  $k$  refleja el orden de la autoregresion. En este modelo la media, los coeficientes autoregresivos y la variance dependen del regimen o estado.



- En algunos casos, en lugar de la media, el intercepto es dependiente del regimen o estado. En este caso, el modelo general es denotado por MSIAH( $m$ )-AR( $k$ ).
- La maximización de la función de verosimilitud se realiza de manera iterativa. La estimación es posible utilizando el algoritmo EM (Expectation Maximization) propuesto por Hamilton (1990) que consiste en dos etapas: Expectation y Maximization. Ver también Krolzig (1997).
- Luego del proceso de optimización es posible reconstruir la dinámica de cada regimen bajo diferentes conjuntos de información. Dicha dinámica puede ser denotada por  $\{\xi_t\}_{t=1}^T$ . Por ejemplo el conjunto de probabilidades filtradas (“*filtered*”) es obtenido como  $\hat{\xi}_{t|\tau}$  cuando  $\tau = t$ . El conjunto de probabilidades suavizadas (“*smoothed*”) es obtenido como  $\hat{\xi}_{t|\tau}$  cuando  $t < \tau \leq T$ .

El Modelo *Smooth Transition Autoregressive* (STAR)

- Siguiendo la notación de van Dijk, Franses, and Teräsvirta (2002), el modelo *STAR* para una serie  $\Delta y_t$  es representado por

$$\Delta y_t = \phi_1' x_t [1 - F(r_t; \gamma, c)] + \phi_2' x_t [F(r_t; \gamma, c)] + \epsilon_t \quad (17)$$

donde

- $x_t = (1, \tilde{x}_t')$  con  $\tilde{x}_t = (\Delta y_{t-1}, \dots, \Delta y_{t-p})'$  y  $\phi_i = (\phi_{i,0}, \phi_{i,1}, \dots, \phi_{i,p})'$ ,  $i = 1, 2$ .
  - $F(\cdot)$  es denominada la función de transición.
  - El término  $\epsilon_t$  es una secuencia “*martingale difference*” con respecto al conjunto de información incluyendo el periodo  $t - 1$  (denotado  $\Omega_{t-1}$ ).
  - La varianza condicional de  $\epsilon_t$  es constante:  $E[\epsilon_t^2 | \Omega_{t-1}] = \sigma^2$ .
- La variable de transición (denotada por  $r_t$ ) puede ser:
    - La variable dependiente retardada:  $r_t = y_{t-d}$  para  $d > 0$ .
    - Una variable exógena:  $r_t = z_t$ .
    - Una función de los retardos de la variable dependiente:  $r_t = g(\tilde{x}_t; \alpha)$  para alguna función  $g$ , la cual depende del vector  $\alpha$ .
    - Una tendencia lineal:  $r_t = t$  (ver Lin and Teräsvirta, 1994).

- Dado lo anterior, el regimen que ocurre en el periodo  $t$  es determinado por la variable observable  $r_t$  y los valores de la función de transición  $F(r_t; \gamma, c)$ .
- La elección de la función de transición  $F(r_t; \gamma, c)$  determina el tipo de comportamiento de cambio de regimen. Hay dos tipos de función de transición ampliamente utilizadas en la literatura. Ellas son las funciones logística y exponencial. Ellas dan origen al modelo logístico STAR y al modelo Exponencial STAR (LSTAR y ESTAR).
- En el modelo *LSTAR*, los dos regimenes están asociados con pequeños y grandes valores de la función de transición  $r_t$  respecto del valor del coeficiente  $c$ . Este tipo de cambio de regimen es conveniente para modelizar asimetrías en las fluctuaciones distinguiendo expansiones y recesiones. Algunos ejemplos: Teräsvirta y Anderson (1992), Teräsvirta, Tjøstheim y Granger (1994) caracterizan la dinámica de la producción industrial en un número de países de la OECD.
- Dada la naturaleza de nuestro interés en ciclos, optamos por utilizar el modelo LSTAR. La función logística de primer orden es definida de la siguiente manera:

$$F(r_t; \gamma, c) = (1 + \exp\{-\gamma\{r_t - c\}\})^{-1}, \quad (18)$$

donde  $\gamma > 0$ .

- El parametro  $c$  in (17) o (18) puede ser interpretado como el valor umbral (“*threshold*”) entre los dos regimenes en el sentido que la función logistica cambia de manera monotónica entre 0 y 1 a medida que  $r_t$  aumenta.
- El parametro  $\gamma$  determina el suavizamiento del cambio en el valor de la función logística y de esta manera mide el suavizamiento de la transición de un regimen a otro. Cuando  $\gamma$  es grande, la función logística  $F(r_t; \gamma, c)$  se aproxima a la función indicador  $I[r_t > c]$ , definida como  $I[A] = 1$  si  $A$  es verdadero y  $I[A] = 0$  en el otro caso. En este caso el cambio de  $F(r_t; \gamma, c)$  de 0 y 1 es casi instantáneo al momento que  $r_t = c$ .
- La función de transition (18) es un caso especial de la función logística de orden  $n$ , la cual está definida por:

$$F(r_t; \gamma, c) = \{1 + \exp[-\gamma \prod_{i=1}^n (r_t - c_i)]\}^{-1}, \quad (19)$$

donde  $\gamma > 0, c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$ . Esta función puede ser utilizada para obtener multiples cambios entre los dos regimenes.

- La secuencia propuesta por Teräsvirta (1994):
  - Especificación de un modelo lineal de orden  $k$ ;
  - Testear la hipótesis de linealidad contra la hipótesis de no linealidad del tipo *STAR*. Si la linealidad es rechazada, escoja la variable de transición apropiada ( $r_t$ ) y la función de transición respectiva  $F(r_t; \gamma, c)$ ;
  - Estimación de los coeficientes del modelo *STAR* seleccionado;
  - Evaluación del modelo;
  - Modificación del modelo si es necesario;
  - Uso del modelo para fines predictivos.
  
- La presente investigación hace uso de las cuatro primeras etapas de la secuencia mencionada.

### Resultados del Modelo *Plucking*

- Primer paso: estimación del modelo *Plucking* sin restricciones.
- El modelo *Plucking* engloba al modelo de Clark (1987). Un test de ratio de verosimilitud (LR) permite obtener un valor de 43.63. Esto comparado con una  $\chi^2_{(5)}$  nos permite obtener un p-value de 0.000. El modelo de Clark (1987) es fuertemente rechazado. Esto implica la existencia de asimetrías en los datos.
- Estimación del modelo *Plucking* con restricciones:
  - Primera restricción:  $\sigma_w = 0$ . El p-value obtenido es 0.216. La hipótesis nula no puede ser rechazada. Esto implica que el “*trend growth*” es constante en el periodo estudiado.
  - Segunda restricción:  $\sigma_{u_0} = \sigma_{u_1} = 0$ . Un p-value de 0.702 es obtenido, lo que indica que la hipótesis nula no puede ser rechazada. Esto implica que las asimetrías en el componente transitorio son debidas al choque discreto  $\pi$  y no al choque simétrico  $u_t$ .
  - Tercer grupo de restricciones:  $\sigma_w = 0, \sigma_{u_0} = \sigma_{u_1} = 0$ . Un p-value de 0.723 (respecto del modelo no restringido) sugiere que la hipótesis nula no puede ser rechazada.

- La suma de los coeficientes autoregresivos en el modelo restringido es 0.50 indicando una sustancial reducción en la persistencia comparado con las otras estimaciones.
- Las duraciones esperadas de una recesión y del periodo normal son de 5.3 y 18.2 trimestres, respectivamente.
- El coeficiente asociado al choque asimétrico y discreto ( $\pi$ ) es estadísticamente significativo y negativo. Esto da soporte al modelo Plucking.
- Conclusiones:
  - Reducción sustancial en la persistencia.
  - Presencia de asimetrías.
  - El modelo restringido señala que la fuente de las asimetrías en el componente transitorio es el choque discreto  $\pi$ .

Table 1. Estimates of the Plucking Model

Parameters	Unrestricted Model	$\sigma_w^2 = 0$	$\sigma_{u_1}^2 = \sigma_{u_2}^2 = 0$	$\sigma_w^2 = 0, \sigma_{u_1}^2 = \sigma_{u_2}^2 = 0$
$q$	0.984 (0.017)	0.897 (0.074)	0.938 (0.067)	0.812 (0.125)
$p$	0.994 (0.011)	0.963 (0.026)	0.966 (0.029)	0.945 (0.037)
$\phi_1$	1.167 (0.288)	1.507 (0.211)	1.697 (0.278)	1.201 (0.129)
$\phi_2$	-0.353 (0.279)	-0.593 (0.196)	-0.756 (0.242)	-0.701 (0.130)
$\sigma_{u_0}$	0.010 (0.007)	0.012 (0.005)		
$\sigma_{u_1}$	0.033 (0.002)	0.000 (0.001)		
$\sigma_{v_0}$	0.010 (0.008)	0.013 (0.004)	0.016 (0.002)	0.019 (0.002)
$\sigma_{v_1}$	0.029 (0.022)	0.058 (0.009)	0.055 (0.008)	0.064 (0.011)
$\sigma_w$	0.001 (0.001)		0.000 (0.001)	
$\pi$	-0.026 (0.026)	-0.014 (0.006)	-0.009 (0.007)	-0.025 (0.008)
<i>Log Lik</i>	202.635	201.872	201.518	201.313

Standard errors in parentheses.



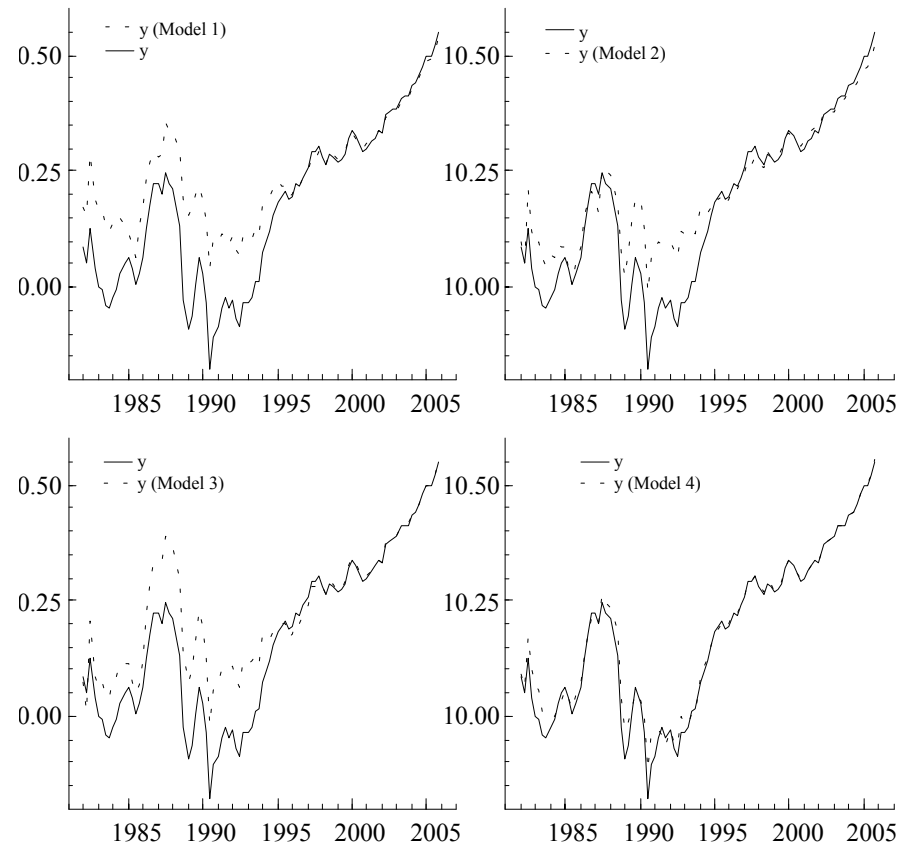


Figure 1. Current and potential output from the Plucking Model

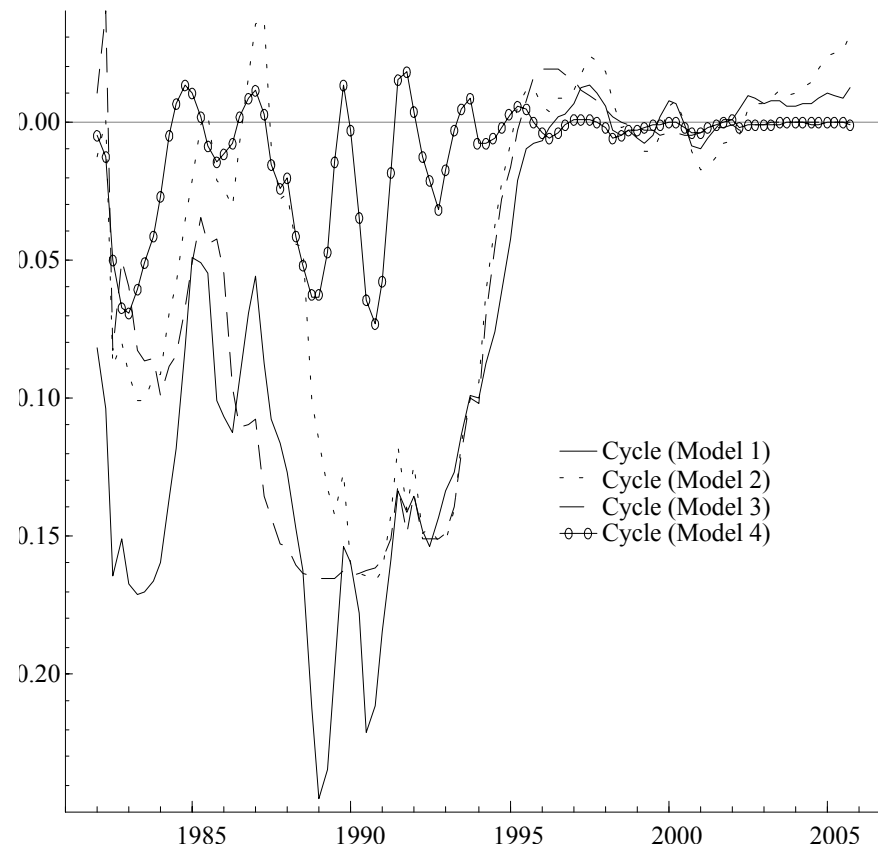


Figure 2. Cycles estimated from the Plucking Model

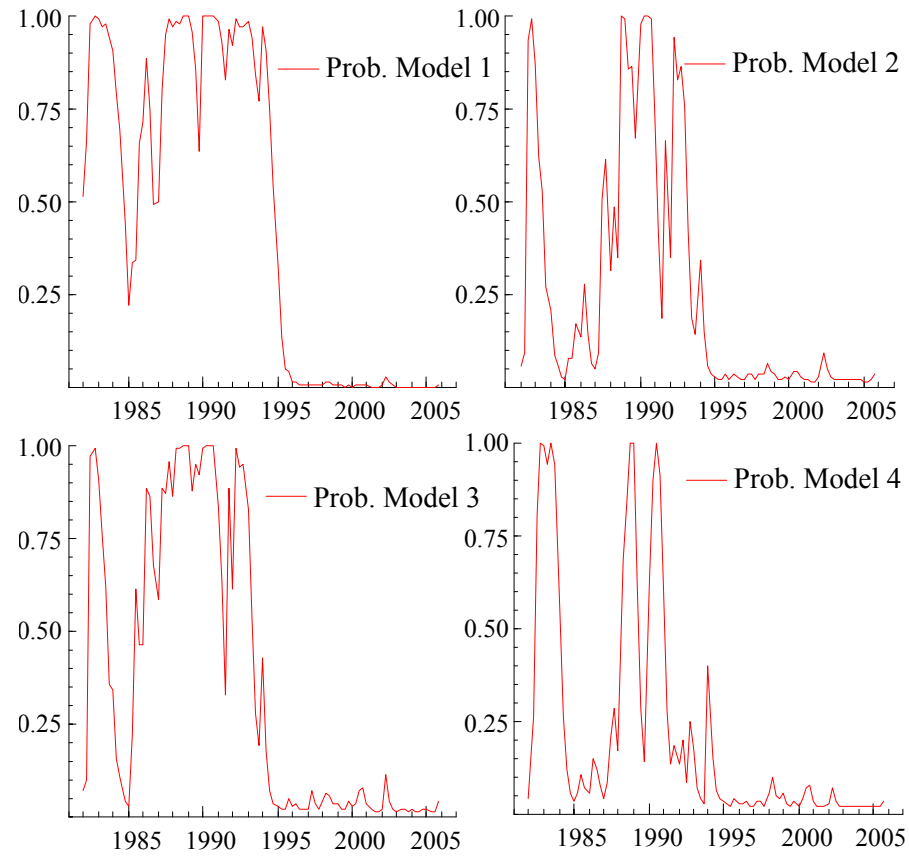


Figure 3. Probabilities to be in Recession times ( $s_t = 1$ )

### Resultados del Modelo *Markov Switching*

- Dos modelos de 2 regimenes han sido estimados:
  - MSMH(2)-AR(4)
  - MSIH(2)-AR(4)
- Los modelos rechazan fuertemente la hipótesis de linealidad (p-values: 0.000)
- AIC selecciona el modelo MSMH(2)-AR(4).
- Primer y cuarto coeficiente autoregresivo son significativos.
- Duración esperada de recesiones: 7 trimestres.
- Duración aproximada de expansiones (“*normal times*”): 31-34 trimestres.
- Periodos de recesión son más volátiles.

Table 2a. Estimates of the Markov-Switching Models

	MSIH(2)-AR(4)		MSMH(2)-AR(4)	
	Coefficient	t-value	Coefficient	t-value
$\mu_1$	-0.016	-1.021	-0.024	-1.665
$\mu_2$	0.011	3.090	0.011	4.364
$\phi_1$	0.182	1.657	0.163	1.614
$\phi_2$	0.023	0.286	0.010	0.133
$\phi_3$	-0.009	-0.116	-0.015	-0.621
$\phi_4$	-0.236	-3.306	-0.286	-4.038
$\sigma_1$	0.064		0.064	
$\sigma_2$	0.020		0.019	
$p_{11}$	0.857		0.859	
$p_{22}$	0.968		0.971	
Log-Likelihood	223.803		224.843	
AIC	-4.152		-4.172	
LR Linearity Tests	47.105		49.185	
Davies' p-value	(0.000)		(0.000)	

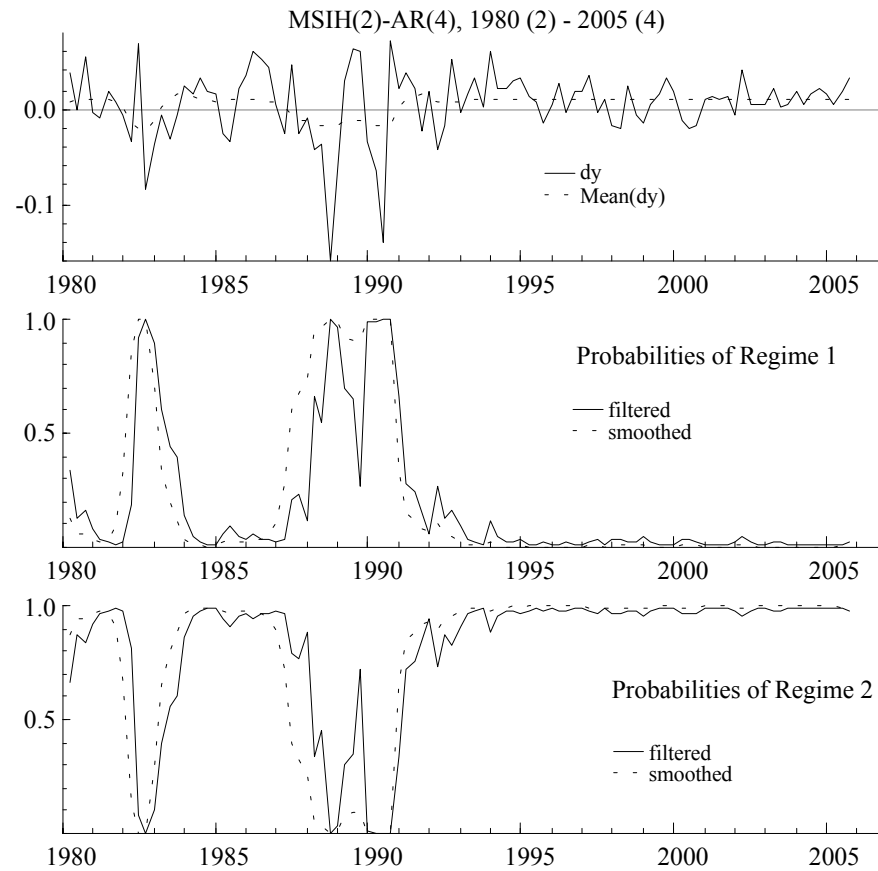


Figure 4. Filtered and Smoothed Probabilities of a MSIH(2)-AR(4) Model

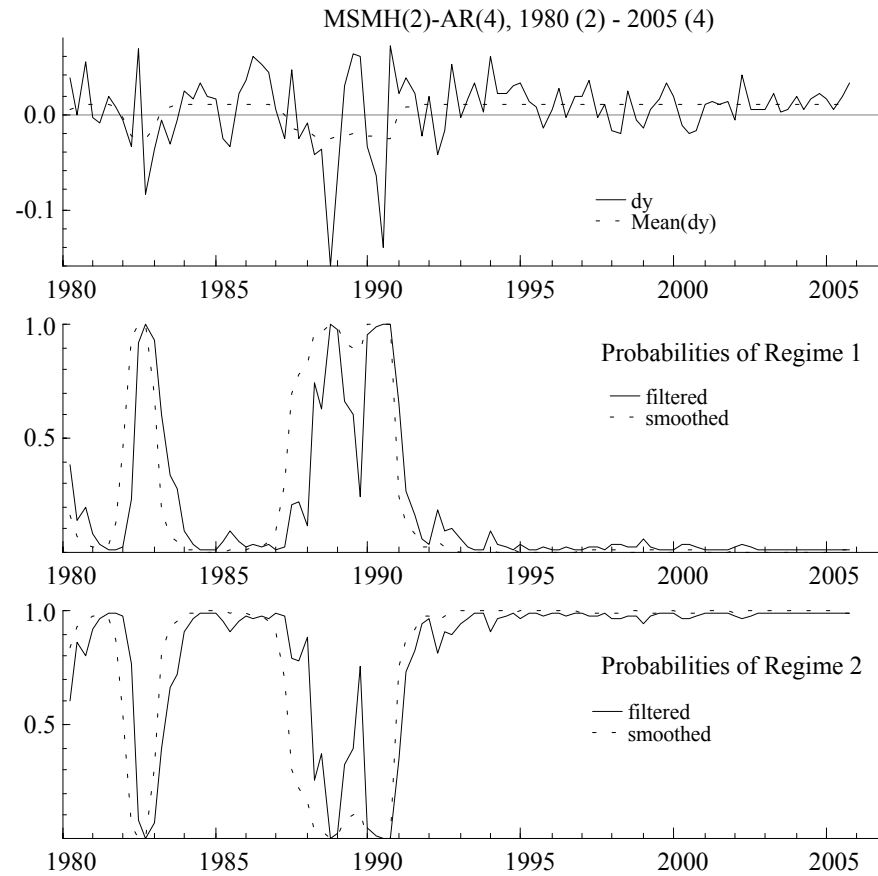


Figure 5. Filtered and Smoothed Probabilities of a MSMH(2)-AR(4) Model

- Dos modelos de 3 regimenes han sido estimados:
  - MSMH(3)-AR(4)
  - MSIH(3)-AR(4)
- Los dos modelos rechazan fuertemente la hipótesis de linealidad (p-values: 0.000)
- AIC selecciona el modelo MSMH(3)-AR(4).
- El primer regimen denota periodos de recesión. El segundo regimen está relacionado con periodos de crecimiento normal. El tercer regimen está asociado con altas tasas de crecimiento del producto.
- Las duraciones de cada regimen son alrededor de 7, 10 y 3 trimestres.
- Los periodos de recesión son lo más volátiles.



Table 2b. Estimates of the Markov-Switching Models

	MSIH(3)-AR(4)		MSMH(3)-AR(4)	
	Coefficient	t-value	Coefficient	t-value
$\mu_1$	-0.023	-1.511	-0.029	-2.797
$\mu_2$	0.010	2.731	0.006	1.677
$\mu_3$	0.039	5.027	0.037	8.308
$\phi_1$	-0.001	-0.008	0.083	0.838
$\phi_2$	-0.020	-0.228	-0.017	-0.276
$\phi_3$	0.069	-0.865	-0.131	-2.075
$\phi_4$	-0.288	-3.921	-0.367	6.0412
$\sigma_1$	0.059		0.062	
$\sigma_2$	0.017		0.016	
$\sigma_3$	0.014		0.009	
$p_{11}$	0.875		0.866	
$p_{22}$	0.902		0.971	
$p_{33}$	0.688		0.572	
Log-Likelihood	225.852		228.833	
AIC	-4.075		-4.133	
LR Linearity Tests	51.204		57.166	
Davies' p-value	(0.000)		(0.000)	

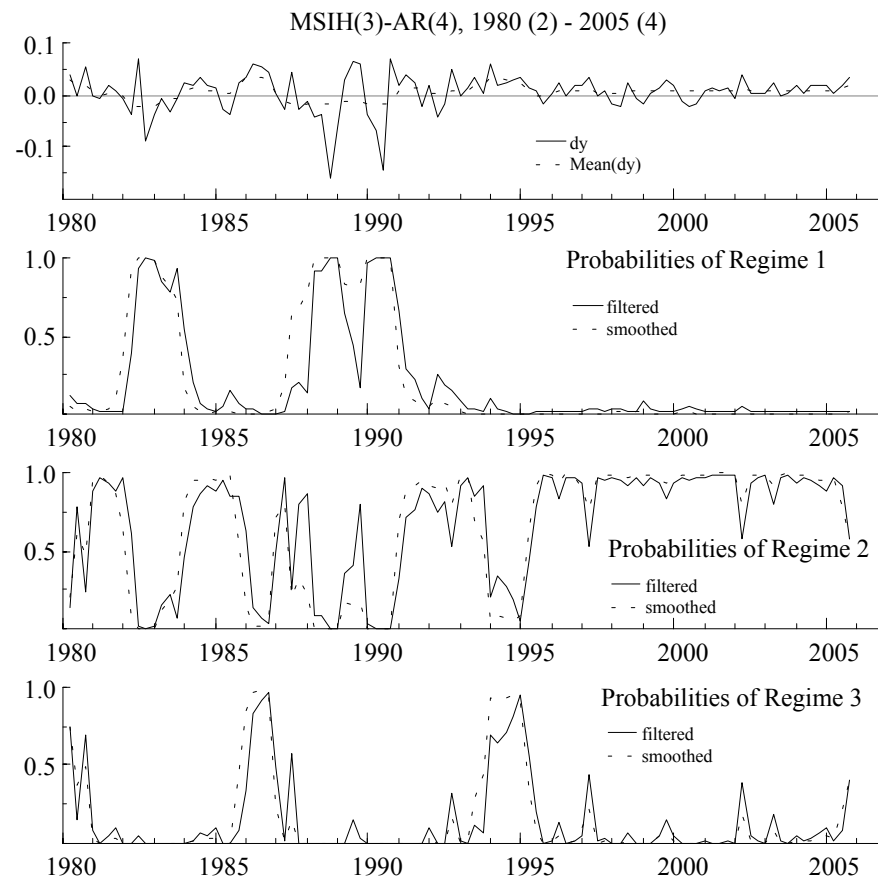


Figure 6. Filtered and Smoothed Probabilities of a MSIH(3)-AR(4) Model

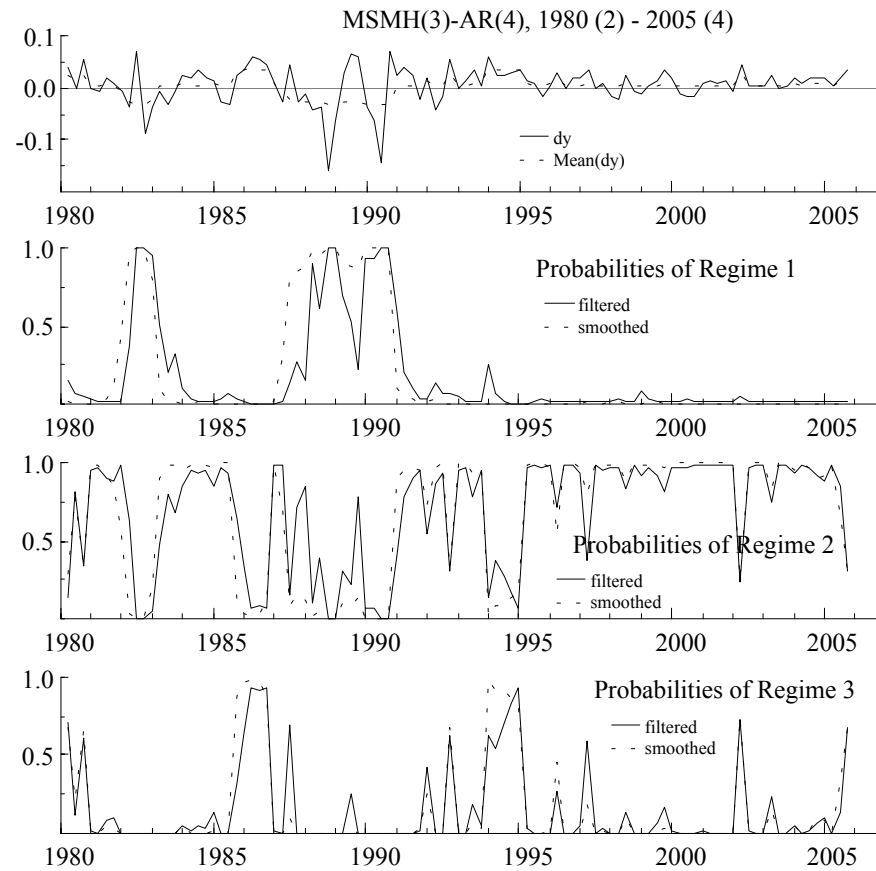


Figure 7. Filtered and Smoothed Probabilities of a MSMH(3)-AR(4) Model

## Resultados del Modelo LSTAR

- Primer modelo utiliza la tasa de crecimiento del producto desestacionalizado ( $\Delta y_t^{sa}$ ).
- Fuerte rechazo de la hipótesis de linealidad.
- Variable de transición seleccionada:  $\Delta y_{t-1}^{sa}$ .
- Selección de un modelo con dos umbrales: LSTAR(2).
- $\hat{\sigma}_{LSTAR}/\hat{\sigma}_{Lineal} = 0.976$ .
- Valor estimado del parámetro de suavizamiento:  $\gamma = 1.733$  (p-value=0.059)
- Valor estimado del primer umbral (threshold:  $c_1$ ) es -0.108 (p-value=0.000)
- Valor estimado del segundo umbral (threshold:  $c_2$ ) es 0.079 (p-value=0.000)

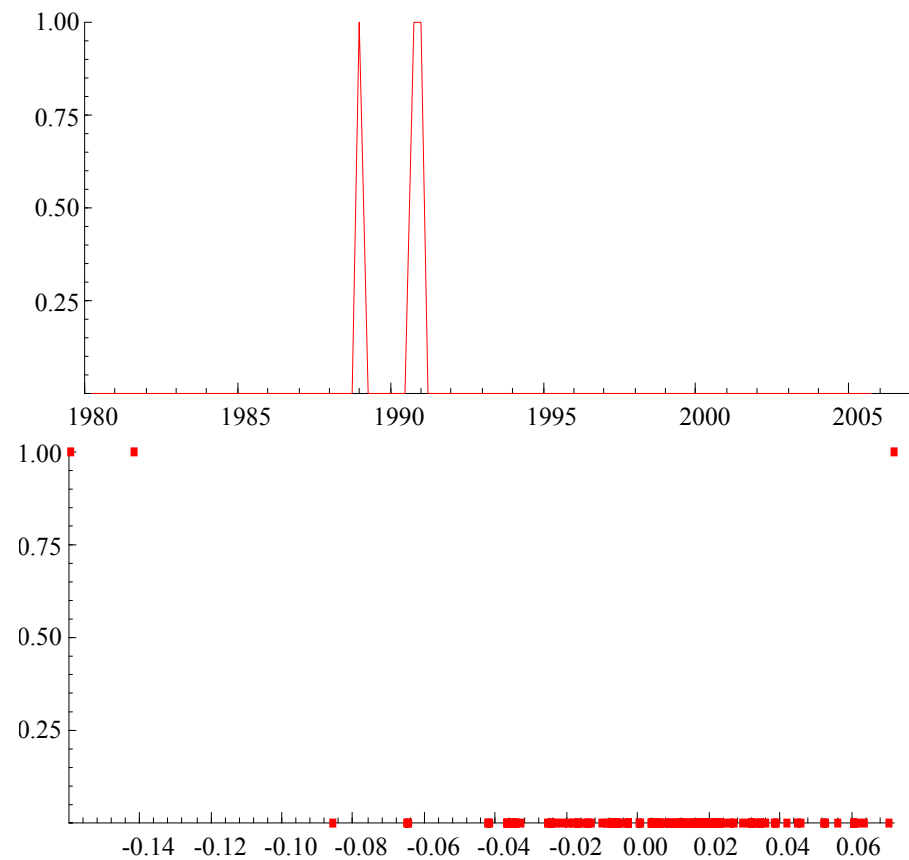


Figure 8. Transition Function against Time and Transition Function against Transition Variable

- Segundo modelo utiliza la tasa de crecimiento del producto respecto al mismo trimestre del año anterior ( $\Delta_4 y_t$ ).
- Fuerte rechazo de la hipótesis de linealidad.
- Variable de transición seleccionada:  $\Delta_4 y_{t-4}$ .
- Selección de un modelo con dos umbrales: LSTAR(2)
- $\hat{\sigma}_{LSTAR}/\hat{\sigma}_{Lineal} = 0.797$ .
- Valor estimado del parámetro de suavizamiento:  $\gamma = 22.981$  (p-value=0.896)
- Valor estimado del primer umbral (threshold:  $c_1$ ) es -0.117 (p-value=0.000)
- Valor estimado del segundo umbral (threshold:  $c_2$ ) es 0.138 (p-value=0.000)

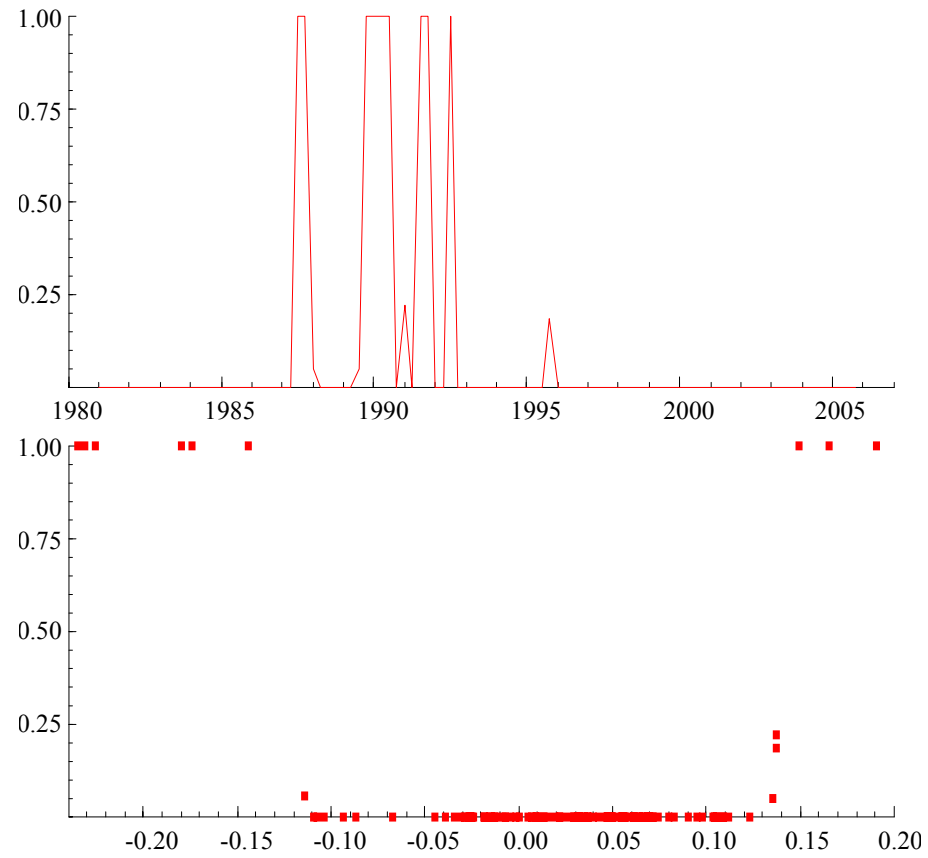


Figure 9. Transition Function against Time and Transition Function against Transition Variable

## Conclusiones

- Fuerte rechazo de la hipótesis de linealidad.
- Presencia de asimetrías.
- Cronología de recesiones:
  - Modelo Plucking: 1982:3-1984:1, 1988:2-1989:2, 1990:1-1991:1
  - Modelo MSMH(2)-AR(4): 1982:2-1983:1, 1987:3-1990:4
  - Modelo MSIH(2)-AR(4): 1982:2-1983:1, 1987:3-1990:4
  - Modelo MSMH(3)-AR(4): 1982:2-1983:1, 1987:3-1990:4
  - Modelo MSIH(3)-AR(4): 1982:2-1983:4, 1987:3-1990:4
  - Modelo LSTAR(2) para  $\Delta y_t^{sa}$ : 1989:1-1989:1, 1990:4-1991:1
  - Modelo LSTAR(2) para  $\Delta_4 y_t$ : 1989:4-1990:3, 1991:3-1991:4