Simulación de Curvas de Rendimiento empleando Componentes Principales: Una aplicación para los Fondos de Pensiones

Banco Central de Reserva del Perú

- Gonzalo Chávez
- Paul Zanabria

Introducción

- La proyección de retornos es uno de los principales retos al momento de realizar el proceso de asignación de activos (*asset allocation)*
- Para ello es importante combinar la información histórica y las expectativas del mercado para cada clase de activo, así como su comportamiento conjunto. En el caso de renta fija, la curva de rendimientos de cada clase de activos (*asset class*) y su relación entre ellas, brinda mayormente esta información.
- La curva de rendimientos es el espectro en el cual un agente en el mercado puede colocar sus activos teniendo en cuenta la volatilidad de los diferentes plazos de la curva y los factores que determinan su movimientos.

Simulación de Curva de rendimiento

- En este trabajo se plantea calcular los retornos esperados de cada clase de activos a partir de la simulación de curvas de rendimientos para portafolios de bonos cupon cero.
- Esta simulacion se logra usando la metodologia de Componentes Principales a los mercados de renta fija en que pueden invertir los Fondos de Pensiones en Peru.
- La aplicación de la metodología de Análisis de Componentes Principales (ACP) a la curva de rendimientos, permite simplificar y hacer mas eficiente este proceso de simulación
- A través del APC se encuentran los factores que explican mas del 95% de la volatilidad del movimiento de la curva de rendimiento, los cuales se reducen a 3 (movimiento paralelo o de nivel, de pendiente y curvatura).

Simulación de curva de rendimientos

Metodología propuesta por Jamshidian y Zhu :

- La metodología se implementa utilizando la técnica estadística de Análisis de Componentes Principales (ACP) a la curva de rendimiento de cada clase de activos y generando variables aleatorias multinomiales, con el objeto de obtener una aproximación discreta de la distribución normal.
- Con estos dos elementos integrados se puede replicar una simulación Monte Carlo tradicional, reduciendo significativamente la demanda de cálculos y pudiendo aplicar los resultados a una variedad importante de activos financieros.

Simulación de curva de rendimientos

El modelo

- La modelación de escenarios se basa en la modelación propuesta por Jamshidian y Zhu (1997).
- Bajo esta propuesta, la curva de rendimiento se puede describir como un vector de n tasas cupón cero, lognormalmente distribuidas de la forma:

(1)..............................Y = [y1, y2, y3,......,yn]

- Cada tasa cupon cero se distribuye de forma lognormal:

$$(2)\cdots\cdots\cdots\frac{dr_i}{r_i} = \mu_i(t)dt + \sigma_i dz_i$$

- Siendo U(t) la curva forward de tasas de interés del mercado correspondiente y Zi(t) muestra la correlación existente entre las variaciones de las tasas.
- Hallamos los componentes principales de cada curva de rendimiento, obteniendo los 3 principales factores de cada una de ellas. Estos factores explican mas del 95% de la volatilidad de las curvas de rendimiento.
  - Nivel.- Explica la sensibilidad lineal entre las tasas de interés y el precio de los bonos.
  - Pendiente.- Explica la inclinación de la estructura de tasas de interés.
  - Curvatura.- Explica las concavidades o convexidades en la curva de rendimiento

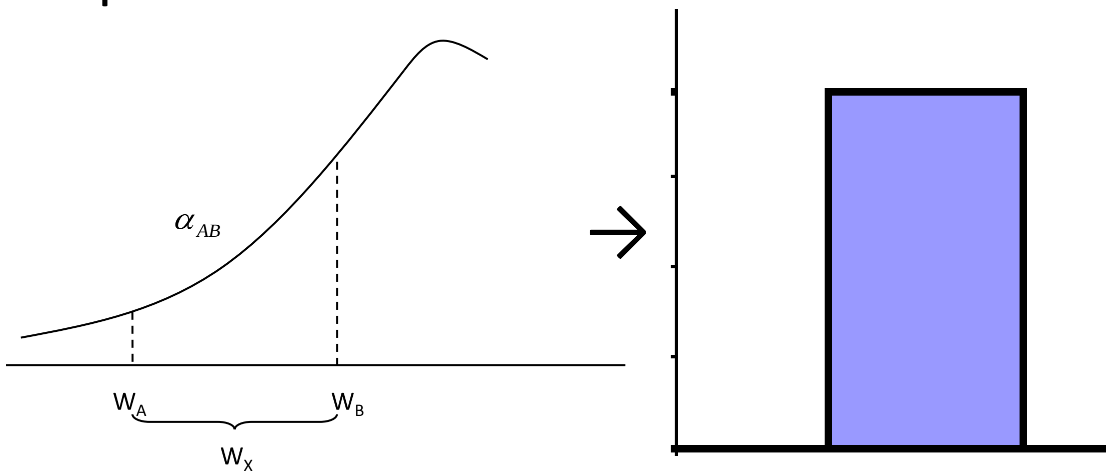
Simulación de curva de rendimientos

- Entonces, ¿Para que usamos un análisis de Montecarlo simulando todos los puntos de la curva de rendimiento si modelando los 3 primeros factores, logramos simular mas del 95% de los escenarios dados por todo el universo?

Simulación de curva de rendimientos

- La utilización del enfoque de ACP permitió reducir el sistema de ecuaciones (n puntos de la curva) a 3 factores, lo que genera un ahorro sustancial de recursos en la modelación de variables.
- Sin embargo, la modelación de estas variables a través del popular método de simulación de Monte Carlo implica el uso de una "fuerza bruta" de casi medio millón de escenarios para solo 3 resultados posibles en la realización de las variables aleatorias vinculadas a un modelo de 12 factores.

- Para reducir la exigencia de cálculos para la simulación de escenarios de tasas de interés, se propone un cambio novedoso: asignar a un estado particular de cada variable aleatoria wi una proporción de probabilidades de la distribución normal.
- Se propone utilizar la distribución multinomial como una aproximación de la distribución normal multivariada



En lugar de generar un gran número de escenarios entre la región Wa y Wb, se genera uno solo (Wx) que es proporcional a los estados infinitos entre Wa y Wb y tienen su misma probabilidad.

• Para obtener las correlaciones entre los distintos mercados, aplicamos la descomposición de Cholesky a la matriz de vectores propios provenientes del análisis del ACP sobre la matriz de correlaciones:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \cdots & \Omega_{1s} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \cdots & \Omega_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{s1} & \Omega_{s2} & \cdots & \Omega_{ss} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Cholesky}} P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1s} \\ 0 & p_{22} & \cdots & p_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

•Los resultados también nos permite analizar como es la volatilidad en los diferentes plazos de la curva de rendimiento para cada *asset class.*

BANCO CENTRAL DE RESERVA DEL PERÚ

- Al integrar la ecuación (1) obtenemos:

$$y(t) = U(t)' e^{\Omega \beta v}$$

- Donde:

  - U(t): Expresa las expectativas sobre el comportamiento de las tasas de interés (tasas forwards).

  - B: Es una matriz que incluye en cada columna los n vectores característicos proveniente del ACP.

  - Ω: Es una matriz diagonal que incluye en sus elementos no nulos las desviaciones estándar de cada tasa de interés clave

  - v: Es un vector que incorpora las correlaciones entre los componentes principales de los diferentes mercados asociados a una distribución de probabilidades multinomiales normalizada.

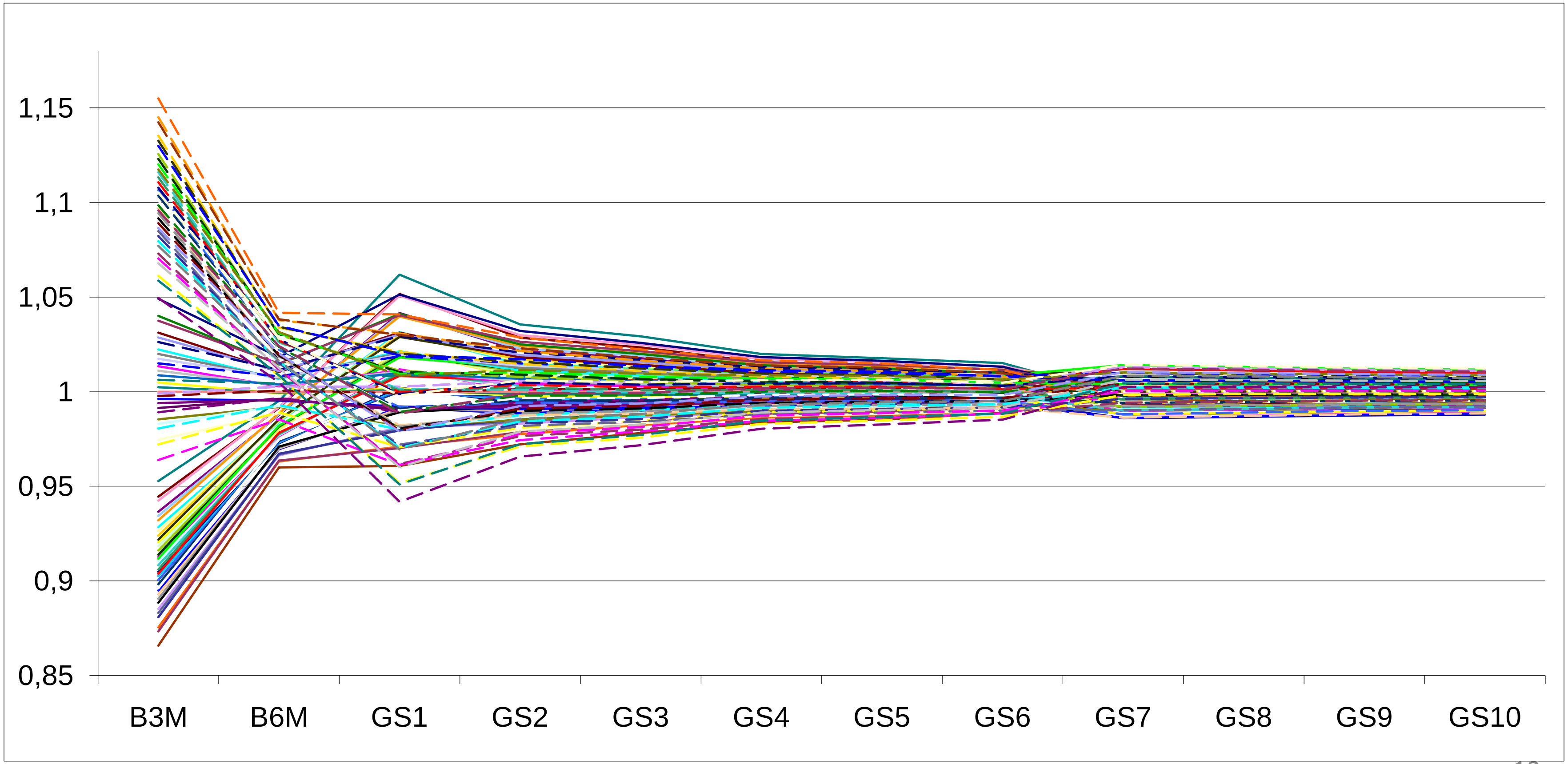
- Esta ecuación es la que nos permite modelar los escenarios de curva de rendimiento para distintos horizontes de inversión.

Simulación de curva de rendimientos

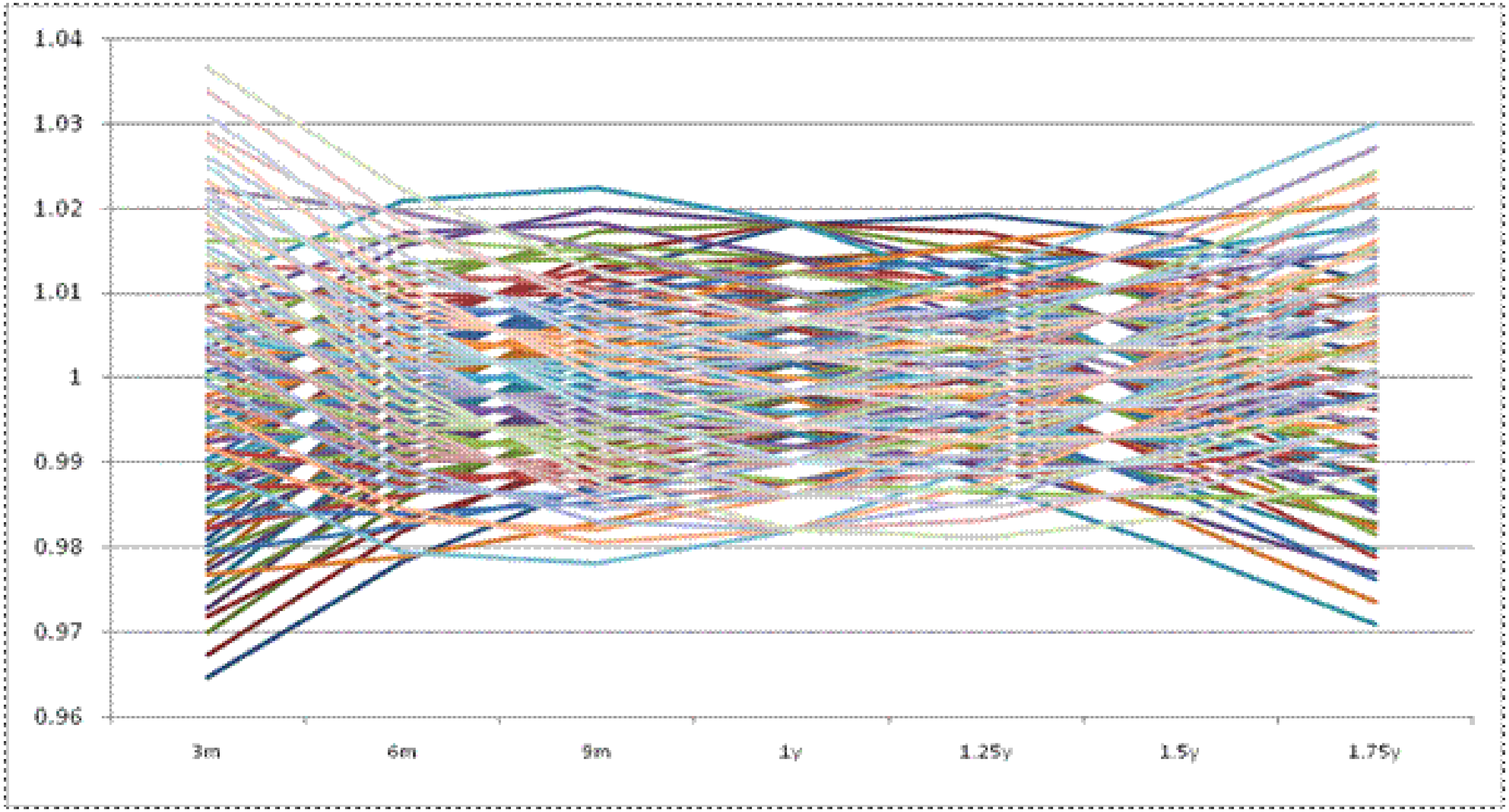
- Se aplico la metodologia a los 4 mercados de renta fija en los que puede invertir los Fondos de Pensiones en Peru:
- Treasuries
- Bonos Peru
- Corporativos
- CDBCR
- La metodologia nos va a permitir obtener retornos esperados para cada asset class tomando en cuenta la correlacion entre los mercados a diferencia de una simulacion de Montecarlo tradicional

Simulación de curva de rendimientos

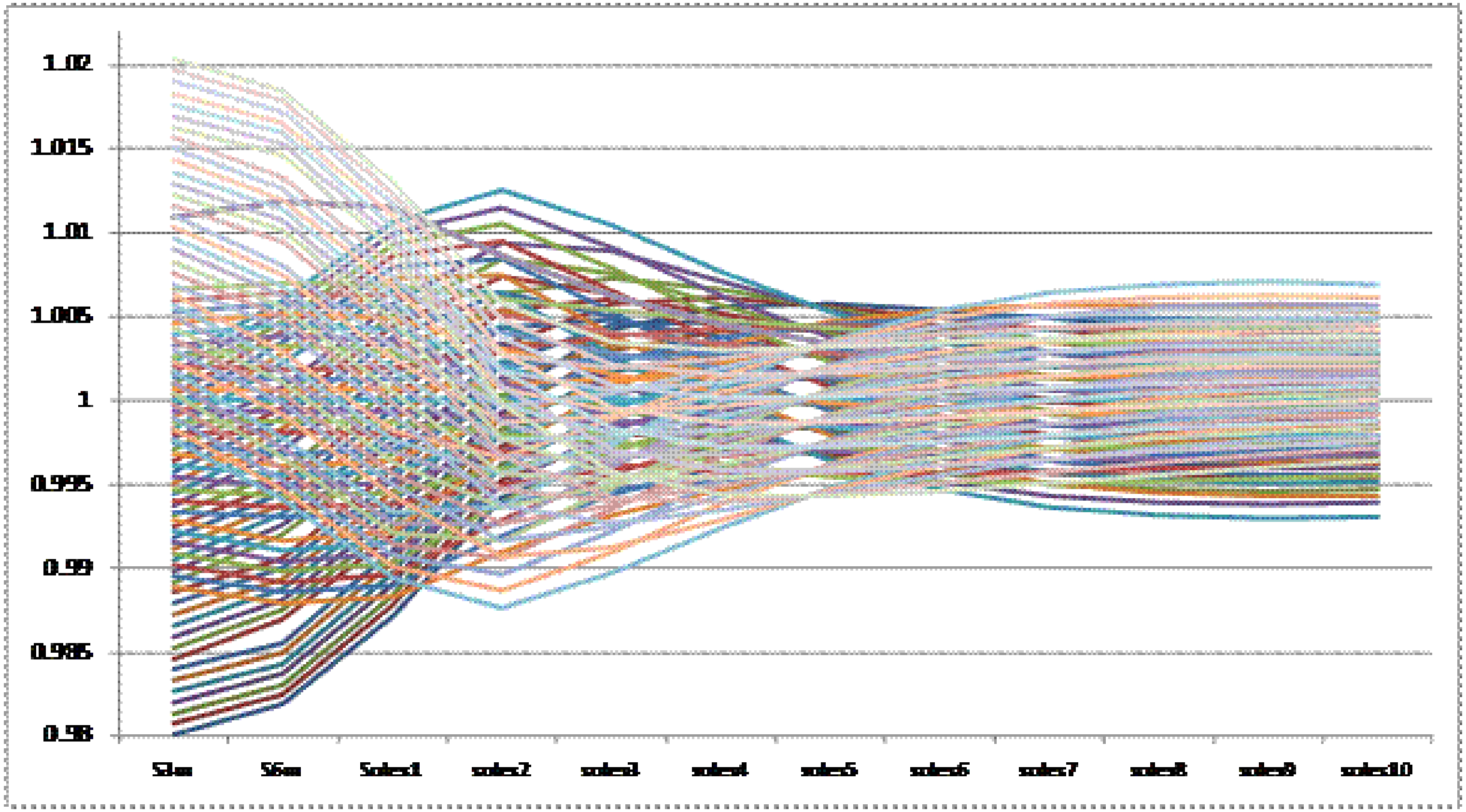
- Tesoros



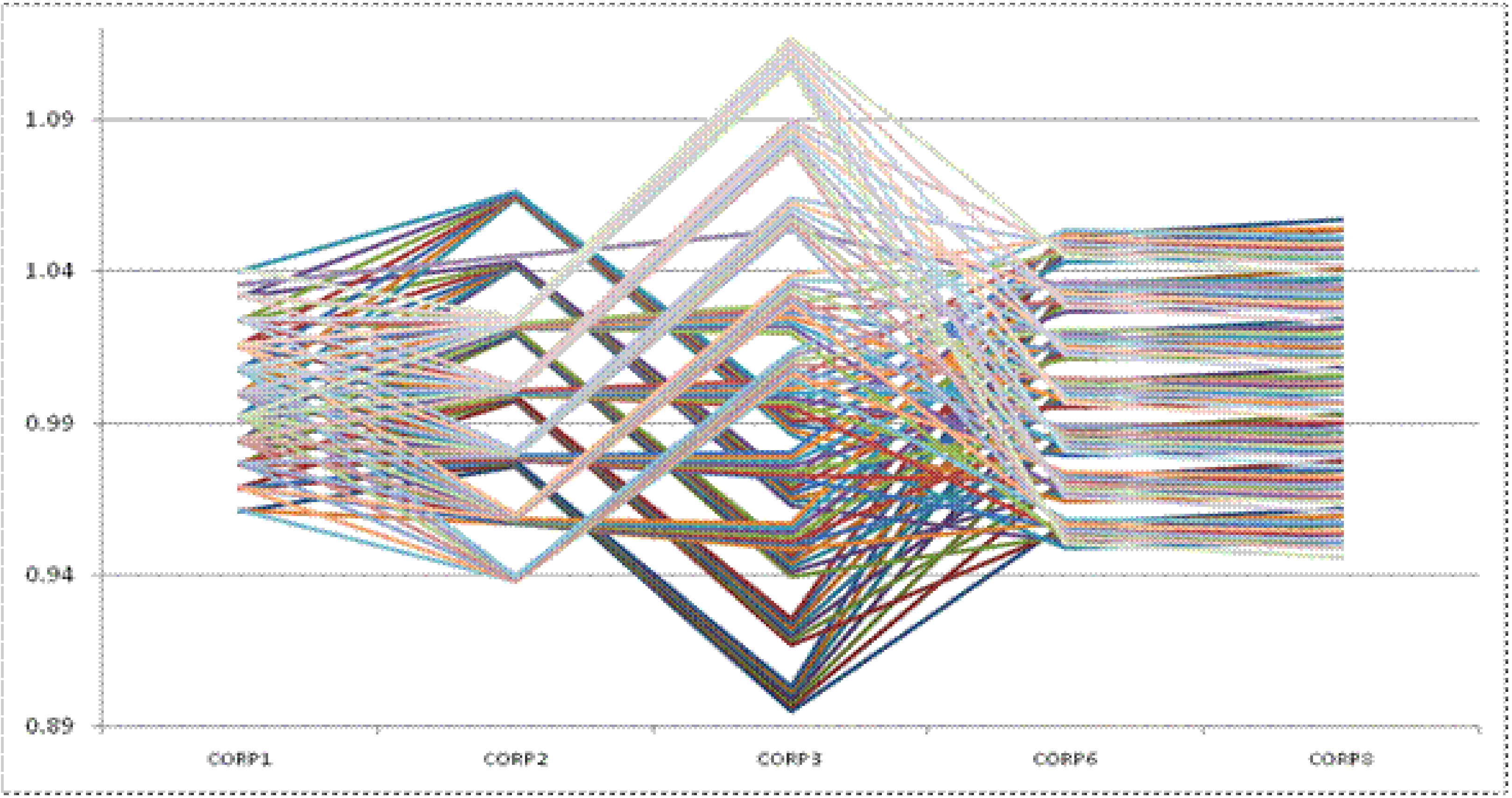
- CDBCR



- Bonos soles


1.02
1.015
1.01
1.005
1
0.995
0.99
0.985
0.98
Soles1
soles2
soles3
soles4
soles5
soles6
soles7
soles8
soles9
soles10

- Corporativos



Retornos Esperados

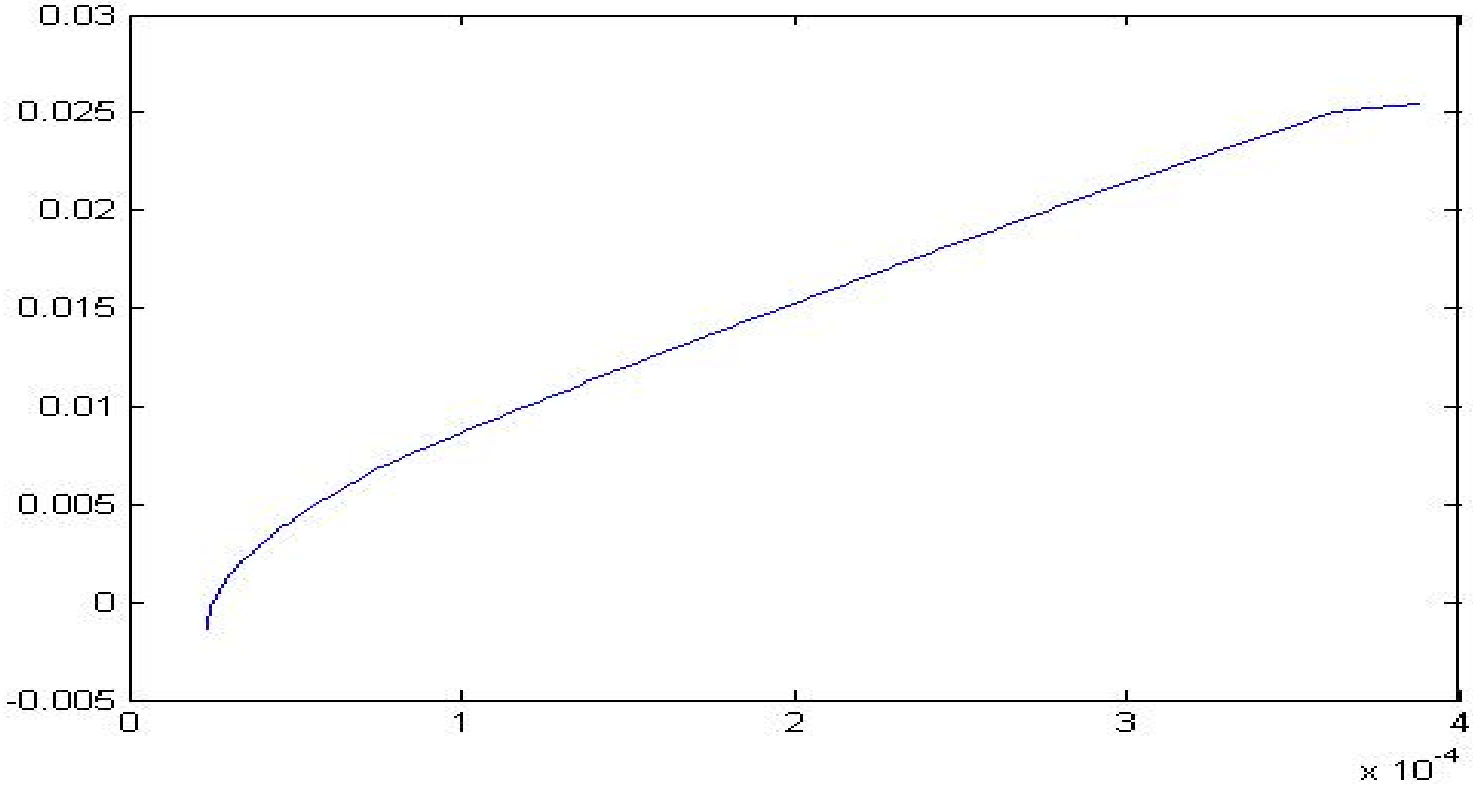
- Con los retornos esperados obtenidos, construimos las fronteras eficientes para los 3 tipos de fondos de las AFP's, tomando en cuenta las restricciones para cada una de ellas.
- De esta forma logramos un estimado mas preciso en el calculo de retornos que la metodologia de Montecarlo.

Matriz de Retornos

	3 meses	6 meses	1 y	2 y	3 y	4 y	5 y	6 y	7 y	8 y	9 y	10 y
Bonos Soles	-0.08%	-0.11%	-0.44%	0.09%	-0.43%	-0.48%	0.09%	0.71%	0.95%	1.93%	2.04%	2.71%
	3m	6m	9m	1y	1.25y	1.5y	1.75y					
CDBCR	-0.08%	-0.09%	-0.03%	0.18%	0.55%	0.99%	1.99%					
	CORP1	CORP2	CORP3	CORP6	CORP8							
Corporativos	-0.68%	-1.09%	-0.95%	-3.65%	-3.97%							
	B3M	B6M	GS1	GS2	GS3	GS4	GS5	GS6	GS7	GS8	GS9	GS10
TREASURIES	-0.09%	-0.21%	-0.44%	-1.07%	-0.99%	-1.27%	-1.36%	-1.10%	-0.79%	-0.50%	-0.50%	-0.29%

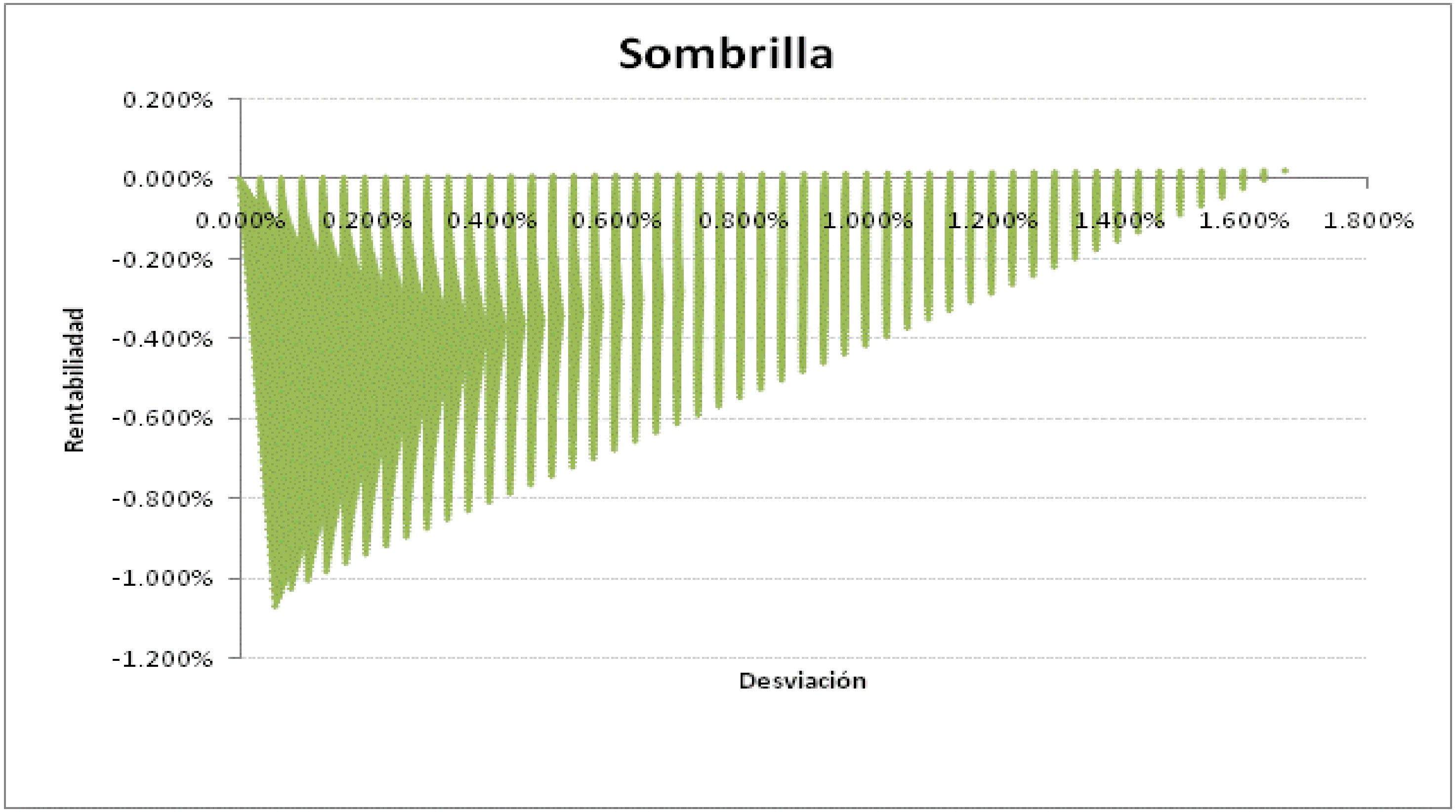
Simulación de escenarios de Tasas de Interés

Frontera Eficiente



Simulación de escenarios de Tasas de Interés

Puntos posibles



Simulación de Curvas de Rendimiento empleando Componentes Principales: Una aplicación para los Fondos de Pensiones

Banco Central de Reserva del Perú

- Gonzalo Chávez
- Paul Zanabria