

Modelos Multivariados GARCH para el Análisis de los Retornos Cambiarios y Bursátiles en el Perú

Dennis Alvaro Polack Gabriel Rodríguez

Pontificia Universidad Católica del Perú
Banco Central de Reserva del Perú

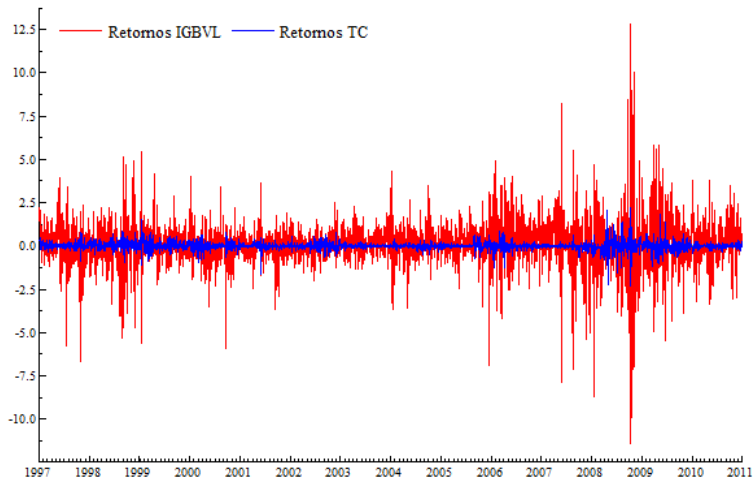
Octubre 2013

- 1 Motivación
- 2 Revisión de la Literatura
- 3 Metodología
- 4 Resultados
- 5 Conclusiones

- El tipo de cambio y el índice de Bolsa son indicadores financieros que se siguen diariamente. La volatilidad en estos indicadores tiene un rol principal en la política monetaria y las decisiones de inversión.
- En el trabajo de Humala y Rodríguez (2013) se identifican características similares a retornos financieros de mercados más desarrollados: clustering de volatilidad, autocorrelaciones, no normalidad, entre otros.
- En particular, los retornos muestran clusters de volatilidad que es una característica que se busca analizar con modelos de Heterocedastidad Autoregresiva.
- La inclusión de una Bolsa Extranjera importante asume el efecto contagio que existe desde mercados bursátiles mundiales hacia Bolsas y otros mercados financieros locales.

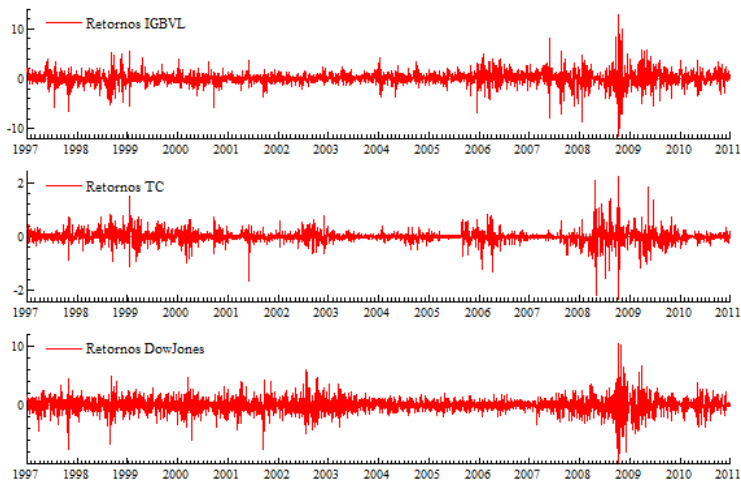
Motivación

Retornos del Tipo de Cambio e Índice de la Bolsa Limeña



Motivación

Retornos Separados del TC, IGBVL y Dow Jones.



- **Trabajos Seminales de Heterocedasticidad Autoregresiva**
 - Engle (1982): Modelo ARCH
 - Bollerslev (1986): Modelo GARCH
- **Modelos Multivariados GARCH-Generalizaciones Matriciales**
 - Bollerslev, Engle y Wooldridge (1986): Modelo VECH
 - Engle y Kroner (1995): Modelo BEKK

● Modelos MGARCH-Multifactoriales

- Engle, Ng y Rothschild (1990)
- Alexander y Chibumba (1997): Modelo OGARCH
- Van der Weide (2002): Modelo GOGARCH
- Boswijk y Van der Weide (2006): Modelo GOGARCH-NLS

● Modelos MGARCH-Correlaciones Condicionales

- Bollerslev (1990): Modelo CCC
- Engle (2002): Modelo DCC
- Tse y Tsui (2002): Modelo DCC

● **Trabajos Empíricos**

- Karolyi (1995)
- Beirne, Caporale, Schulze-Ghattas y Spagnolo (2010)
- Celik (2012)

- Los retornos son calculados del índice bursátil y del tipo de cambio vigentes diarios:

$$r_t = 100 * [\ln(I_t) - \ln(I_{t-1})]$$

$$I_t = [IGBVL_t, TC_t, DowJones_t]'$$

- El tipo de cambio es medido en soles por dólar.
- Se hará primero un análisis bivariado (IGBVL y TC).
- Luego se incorporará el retorno del índice Dow Jones.

- La ecuación de la media de los retornos viene dado por un proceso AR(1):

$$r_t = \phi r_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Los errores de los retornos tienen comportamiento autoregresivo heterocedástico.

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= H_t^{1/2} n_t \\ \text{var}_{t-1}(n_t) &= E(n_t n_t') = I_t\end{aligned}$$

- Los retornos heredan este comportamiento:

$$\begin{aligned}\text{var}(r_t | F_{t-1}) &= \text{var}_{t-1}(\varepsilon_t) \\ &= H_t^{1/2} \text{var}_{t-1}(n_t) (H_t^{1/2})' \\ &= H_t\end{aligned}$$

- La matriz de varianzas-covarianzas de los retornos quedaría determinada como:

$$\text{vech}(H_t) = c + \sum_{j=1}^p A_j \text{vech}(\varepsilon_{t-j} \varepsilon'_{t-j}) + \sum_{j=1}^q B_j \text{vech}(H_{t-1})$$

- El operador *vech* refiere a vectorización de la matriz correspondiente.

- El modelo BEKK más general asume el siguiente proceso para H_t :

$$H_t = CC' + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^K A'_{kj} \varepsilon_{t-j} \varepsilon'_{t-j} A_{kj} + \sum_{j=1}^q \sum_{k=1}^K B'_{kj} H_{t-1} B_{kj}$$

- Esta especificación logra la equivalencia con el modelo VECM, así como impone formas cuadráticas para asegurar el carácter positivo definido de H_t .

- Para asegurar la factibilidad numérica, en la literatura el modelo anterior se reduce a:

$$H_t = CC' + \sum_{j=1}^p A_j' \varepsilon_{t-j} \varepsilon_{t-j}' A_j + \sum_{j=1}^q B_j' H_{t-1} B_j$$

- Se mantiene la estructura en formas cuadráticas.
- Se reducen los parámetros a estimar.
- Se procede a estimar por máxima verosimilitud asumiendo distribuciones Normal o Student para los errores.

- Nosotros estimamos los modelos Diagonal y Escalar que tienen la siguiente estructura:

$$A_j = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}; B_j = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{23} \end{bmatrix}$$

Modelo BEKK Diagonal

$$a_1 \neq a_2 \neq a_3, b_1 \neq b_2 \neq b_3$$

Modelo BEKK Escalar

$$a_1 = a_2 = a_3, b_1 = b_2 = b_3$$

Variance Targeting

- Se coloca la parte constante de la ecuación de la varianza en función de la matriz de varianza-covarianza incondicional de ε ($\bar{\Sigma}$):

$$CC' = \text{unvec}\left[I_{N^2} - \sum_{j=1}^p (A_j \otimes A_j)' - \sum_{j=1}^q (B_j \otimes B_j)'\right] \bar{\Sigma}$$

- Se busca factibilidad numérica para la estimación, reduciéndose las estimaciones a solo A_j y B_j .

- Los errores de los retornos se estandarizan:

$$\varepsilon_t = V^{1/2} n_t$$

$$V = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

- Los errores estandarizados dependerán de factores subyacentes que son no correlacionados y siguen procesos GARCH univariados:

$$n_t = Zf_t$$

$$E_{t-1}(f_t) = 0$$

$$\text{Var}_{t-1}(f_t) = \text{diag}(\sigma_{f_{1t}}^2, \dots, \sigma_{f_{mt}}^2)$$

$$\sigma_{f_{it}}^2 = (1 - \alpha_i - \beta_i) + \alpha_i f_{i,t-1}^2 + \beta_i \sigma_{f_{i,t-1}}^2$$

Metodología-Modelos Multifactoriales

Especificación de asociación de factores y retornos

- Los modelos multifactoriales que se presentan se diferencian en la forma como se especifica la matriz Z que asocia los factores con los errores estandarizados.

$$n_t = Zf_t$$

- La varianza de los errores entonces vendría determinado por la matriz Z y las varianzas de los factores:

$$\begin{aligned} \text{Var}_{t-1}(\varepsilon_t) &= H_t \\ &= V^{1/2} \text{Var}_{t-1}(n_t) V'^{1/2} \\ &= V^{1/2} Z_m \text{Var}_{t-1}(f_t) Z'_m V'^{1/2} \end{aligned}$$

Modelo O-GARCH: Alexander y Chibumba (1997)

- Este modelo permite tener menos factores que la cantidad de variables analizadas.

$$\begin{aligned} Z &= Z_m = P_m L_m^{1/2} \\ &= P_m \text{diag}(l_1^{1/2}, \dots, l_m^{1/2}) \\ m &\leq \dim(r_t) \end{aligned}$$

- Las matriz P_m se obtiene del Análisis de Componentes Principales: se hallará autovectores.
- Mientras que los valores de L_m serían los correspondientes autovalores. La matriz Z_m es ortogonal.

Modelo GO-GARCH: Van der Weide (2002)

- En este modelo, la matriz Z no tiene que ser necesariamente ortogonal, solamente invertible:

$$Z = PL^{1/2}U$$

$$m = \dim(r_t)$$

$$U = \prod_{i < j} G_{ij}(\delta_{ij}), \quad -\pi \leq \delta_{ij} \leq \pi, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

- Las matrices P y L continúan siendo obtenidas del Análisis de Componentes Principales.
- La matriz U permite que Z muestre mayores alternativas para la relación entre factores y retornos.

Modelo GO-GARCH NLS: Boswijk y Van der Weide (2006)

- Se incorpora un cambio en la forma de estimación: No Lineal.
- En el GO-GARCH de Van der Weide (2002) la matriz U se estimaba conjuntamente con los procesos GARCH de los factores.
- Ahora se separa la estimación en tres etapas:
 1. Análisis de Componentes Principales
 2. Obtención de las matrices de rotación de U
 3. Estimación de los procesos GARCH de los factores.
- El costo es pérdida de eficiencia.

Resultados - Modelos BEKK: IGBVL y TC

Modelos BEKK Escalar y Diagonal. Distribuciones Normal y Student

Tabla 1: Coeficientes Modelos BEKK-IGBVL y TC

	ESC-N		ESC-S		DIAG-N		DIAG-S	
AR(1)-1	0.229	(0.00)	0.192	(0.00)	0.128	(0.00)	0.191	(0.00)
AR(1)-2	0.146	(0.00)	0.166	(0.00)	0.117	(0.01)	0.167	(0.00)
C ₁₁	0.194	(0.00)	0.186	(0.00)	0.244	(0.00)	0.196	(0.00)
C ₁₂	-0.01	(0.05)	-0.01	(0.38)	-0.02	(0.09)	-0.01	(0.34)
C ₂₂	0.019	(0.00)	0.016	(0.00)	0.001	(0.21)	0.017	(0.01)
b ₁	0.924	(0.00)	0.929	(0.00)	0.906	(0.00)	0.938	(0.00)
b ₂					-0.90	(0.00)	0.917	(0.00)
a ₁	0.383	(0.00)	0.369	(0.00)	0.394	(0.00)	0.316	(0.00)
a ₂					0.433	(0.00)	0.398	(0.00)
df			5.738	(0.00)			6.093	(0.00)

Resultados - Modelos BEKK: IGBVL y TC

Modelos BEKK Escalar y Diagonal. Distribuciones Normal y Student

Cont. Tabla 1: Verosimilitud y Criterios de Información

	ESC-N	ESC-S	DIAG-N	DIAG-S
Log Likelihood	-3961	-3583	-4044	-3576
Akaike	2.280	2.064	2.329	2.061
Schwarz	2.293	2.078	2.345	2.079
Shibata	2.280	2.064	2.329	2.061
Hannan-Quinn	2.285	2.069	2.335	2.067

Resultados - Modelos BEKK: IGBVL y TC

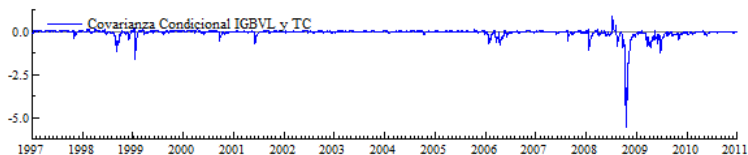
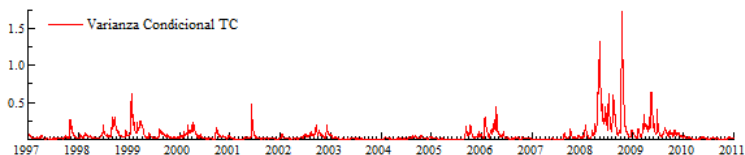
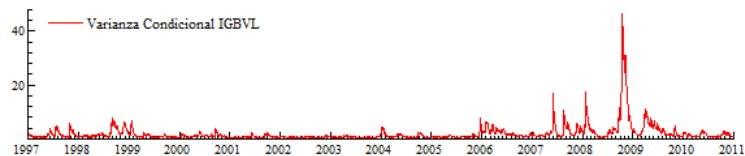
Modelos BEKK Escalar y Diagonal (Variance Targeting). Distribuciones Normal y Student

Tabla 2. Modelos BEKK con Variance Targeting- IGBVL y TC

	ESC-N VT		ESC-S VT		DIAG-S VT	
AR(1)-1	0.233	(0.00)	0.193	(0.00)	0.192	(0.00)
AR(1)-2	0.148	(0.00)	0.170	(0.00)	0.168	(0.00)
b ₁	0.932	(0.00)	0.940	(0.00)	0.935	(0.00)
b ₂					0.927	(0.00)
a ₁	0.348	(0.00)	0.332	(0.00)	0.328	(0.00)
a ₂					0.368	(0.00)
df			6.367	(0.00)	6.256	(0.00)
Log Likelihood	-4008		-3625		-3589	
Akaike	2.31		2.086		2.067	
Schwarz	2.313		2.095		2.079	
Shibata	2.305		2.086		2.067	
Hannan-Quinn	2.308		2.089		2.071	

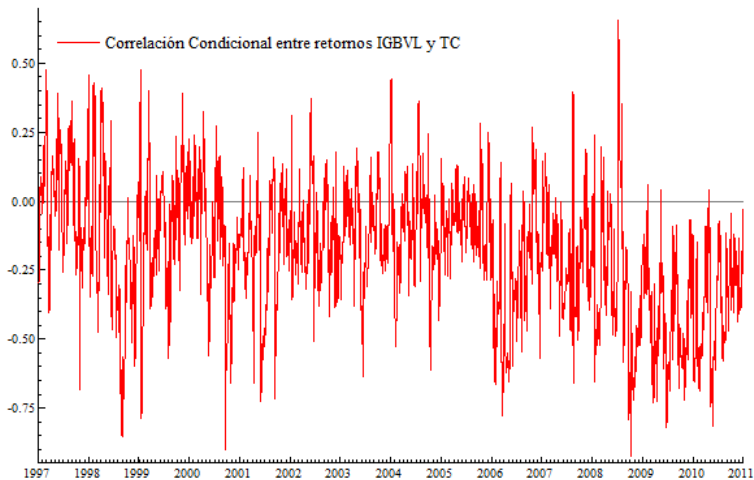
Resultados-Modelo BEKK Diagonal Student: IGBVL y TC

Varianzas y Covarianza Condicionales de los Retornos



Resultados-Modelo BEKK Diagonal Student: IGBVL y TC

Correlaciones Condicionales de los Retornos



Resultados - Modelos Multifactoriales: IGBVL y TC

Modelos Factoriales: OGARCH, GOGARCH (2002) y GOGARCH NLS

Tabla 5. Coeficientes Modelos Factoriales- IGBVL y TC

	O-GARCH		GO-GARCH		GO-GARCH NLS	
AR(1)-1	0.199	(0.00)	0.199	(0.00)	0.199	(0.00)
AR(1)-2	0.218	(0.00)	0.218	(0.00)	0.218	(0.00)
Matriz Z						
Conversión	$\begin{bmatrix} 0.805 & 0.594 \\ -0.805 & 0.594 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0.980 & -0.199 \\ -0.099 & 0.995 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -0.985 & 0.171 \\ 0.127 & -0.992 \end{bmatrix}$	
Factores						
Factores						
PC(1)						
ARCH	0.192	(0.00)	0.188	(0.00)	0.191	(0.00)
GARCH	0.783	(0.00)	0.776	(0.00)	0.772	(0.00)
PC(2)						
ARCH	0.113	(0.00)	0.176	(0.00)	0.173	(0.00)
GARCH	0.875	(0.00)	0.817	(0.00)	0.819	(0.00)

Resultados - Modelos Multifactoriales: IGBVL y TC

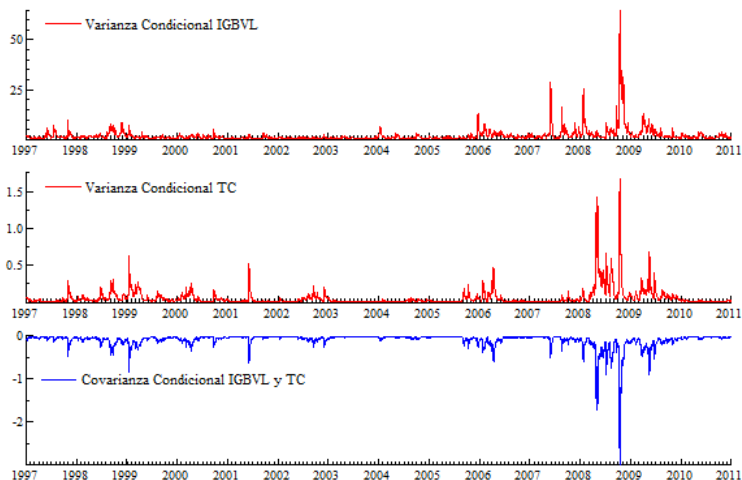
Modelos Factoriales: OGARCH, GOGARCH (2002) y GOGARCH NLS

Continuación Tabla 5: Modelos Factoriales- IGBVL y TC

	O-GARCH	GO-GARCH	GO-GARCH NLS
Log Likelihood	-4435	-3865	-3868
Akaike	2.552	2.226	2.227
Schwarz	2.563	2.238	2.239
Shibata	2.552	2.226	2.227
Hannan-Quinn	2.556	2.229	2.231

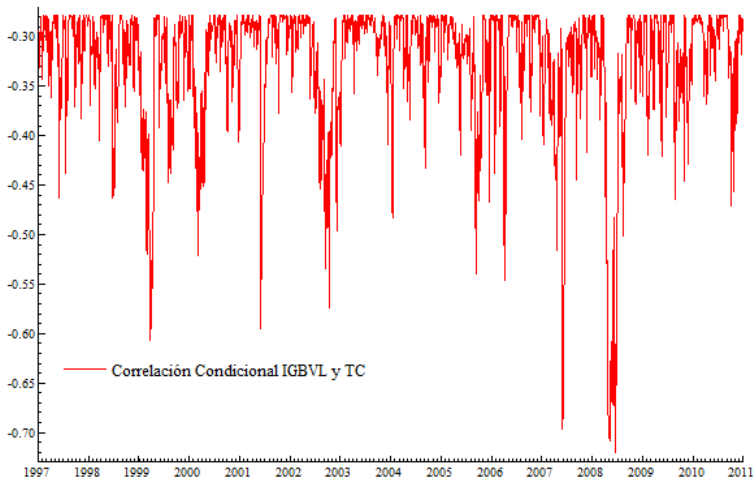
Resultados - Modelo GO-GARCH (2002): IGBVL y TC

Varianzas y Covarianza Condicionales de los Retornos



Resultados - Modelo GO-GARCH (2002): IGBVL y TC

Correlaciones Condicionales de los Retornos



Resultados - Modelos MGARCH

Correlaciones entre los resultados de los modelos

Tabla 7. Correlaciones entre las varianzas condicionales del IGBVL

	ESC-S	DIAG-N	DIAG-S	DIAG-S VT	OGARCH	GOGARCH
ESC-S	1.000					
DIAG-N	0.994	1.000				
DIAG-S	0.999	0.987	1.000			
DIAG-S VT	0.999	0.990	0.999	1.000		
O-GARCH	0.860	0.876	0.848	0.853	1.000	
GO-GARCH	0.973	0.988	0.963	0.967	0.882	1.000

Resultados - Modelos MGARCH

Correlaciones entre los resultados de los modelos

Tabla 8. Correlaciones entre las varianzas condicionales del TC

	ESC-S	DIAG-N	DIAG-S	DIAG-S VT	O-GARCH	GO-GARCH
ESC-S	1.000					
DIAG-N	0.988	1.000				
DIAG-S	0.998	0.996	1.000			
DIAG-S VT	0.999	0.990	0.998	1.000		
O-GARCH	0.877	0.870	0.876	0.877	1.000	
GO-GARCH	0.988	0.995	0.995	0.990	0.845	1.000

Resultados - Modelos BEKK: IGBVL, TC y Dow Jones

Modelos BEKK Escalar y Diagonal. Distribuciones Normal y Student

Tabla 3. Coeficientes Modelos BEKK- IGBVL, TC y DJ

	ESC-N		ESC-S		DIAG-N		DIAG-S	
C ₁₁	0.152	(0.00)	0.146	(0.00)	0.163	(0.00)	0.173	(0.00)
C ₁₂	-0.01	(0.03)	-0.001	(0.49)	-0.01	(0.20)	-0.01	(0.35)
C ₁₃	0.042	(0.01)	0.029	(0.01)	0.034	(0.00)	0.03	(0.01)
C ₂₂	0.015	(0.00)	0.018	(0.00)	0.021	(0.04)	0.02	(0.01)
C ₂₃	-0.001	(0.93)	-0.01	(0.43)	-0.01	(0.45)	-0.01	(0.20)
C ₃₃	0.126	(0.00)	0.142	(0.00)	0.096	(0.00)	0.089	(0.00)
b ₁	0.951	(0.00)	0.954	(0.00)	0.956	(0.00)	0.950	(0.00)
b ₂					0.911	(0.00)	0.917	(0.00)
b ₃					0.972	(0.00)	0.977	(0.00)
a ₁	0.308	(0.00)	0.293	(0.00)	0.271	(0.00)	0.280	(0.00)
a ₂					0.412	(0.00)	0.399	(0.00)
a ₃					0.221	(0.00)	0.201	(0.00)
df			6.47	(0.00)			6.966	(0.00)

Resultados - Modelos BEKK: IGBVL, TC y Dow Jones

Modelos BEKK Escalar y Diagonal. Distribuciones Normal y Student

Continuación Tabla 3. Modelos BEKK- IGBVL, TC y DJ

	ESC-N	ESC-S	DIAG-N	DIAG-S
Log Likelihood	-8997	-8569	-8942	-8527
Akaike	5.177	4.931	5.147	4.909
Schwarz	5.196	4.953	5.174	4.938
Shibata	5.177	4.931	5.147	4.909
Hannan-Quinn	5.184	4.939	5.157	4.920

Resultados - Modelos BEKK: IGBVL, TC y Dow Jones

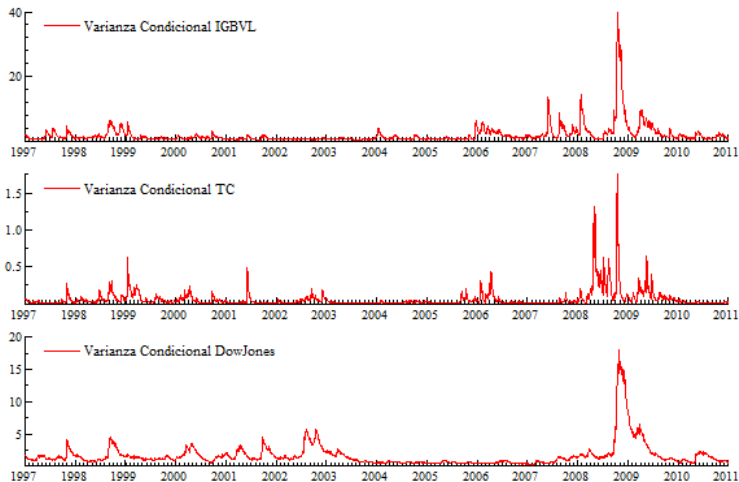
Modelos BEKK Escalar y Diagonal (Variance Targeting). Distribuciones Normal y Student

Tabla 4. Coeficientes Modelos BEKK con Variance Targeting- IGBVL, TC y DJ

	ESC-N VT		ESC-S VT		DIAG-N VT		DIAG-S VT	
b ₁	0.957	(0.00)	0.961	(0.00)	0.955	(0.00)	0.950	(0.00)
b ₂					0.925	(0.00)	0.939	(0.00)
b ₃					0.968	(0.00)	0.972	(0.00)
a ₁	0.278	(0.00)	0.267	(0.00)	0.272	(0.00)	0.288	(0.00)
a ₂					0.369	(0.00)	0.337	(0.00)
a ₃					0.232	(0.00)	0.219	(0.00)
df			7.261	(0.00)			7.183	(0.00)
Log Likelihood	-9045		-8626		-8967		-8554	
Akaike	5.20		4.96		5.16		4.92	
Schwarz	5.21		4.97		5.17		4.94	
Shibata	5.20		4.96		5.16		4.92	
Hannan-Quinn	5.20		4.96		5.16		4.93	

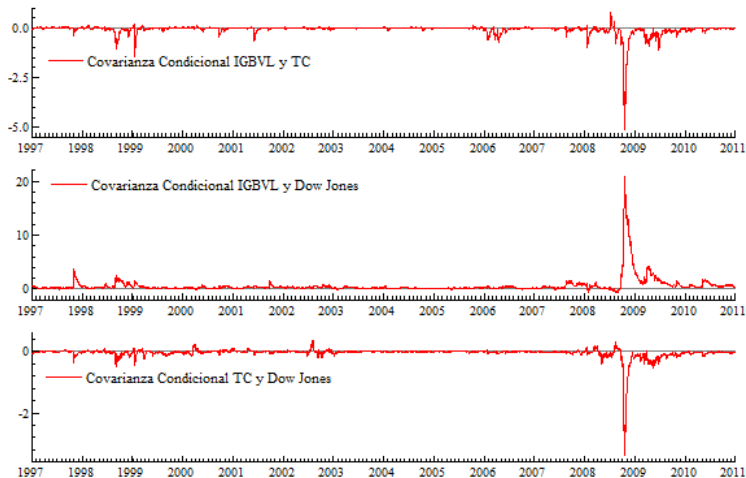
Resultados - Modelo BEKK Diagonal Student: IGBVL, TC y Dow Jones

Varianzas Condicionales de los Retornos



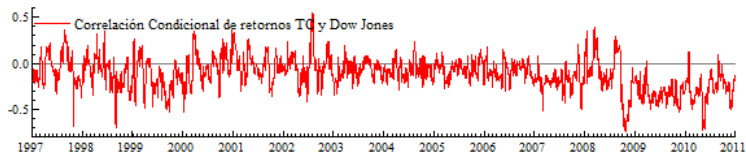
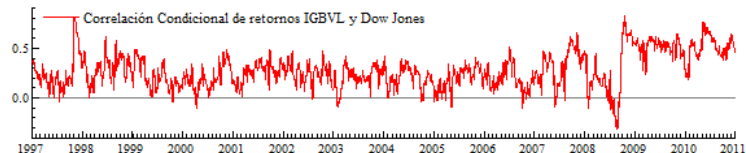
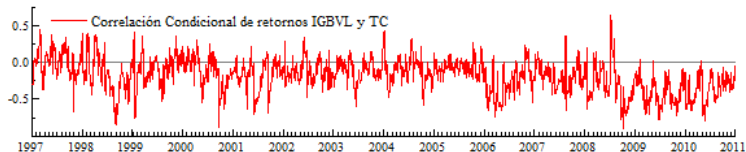
Resultados - Modelo BEKK Diagonal Student: IGBVL, TC y Dow Jones

Covarianzas Condicionales de los Retornos



Resultados - Modelo BEKK Diagonal Student: IGBVL, TC y Dow Jones

Correlaciones Condicionales de los Retornos



Resultados - Modelos Factoriales: IGBVL, TC y Dow Jones

Modelos Factoriales: OGARCH, GOGARCH (2002) y GOGARCH NLS

Tabla 6. Coeficientes Modelos Factoriales- IGBVL, TC y DJ

	O-GARCH		GO-GARCH		GO-GARCH NLS	
AR(1)-1	0.19	(0.00)	0.19	(0.00)	0.19	(0.00)
AR(1)-2	0.22	(0.00)	0.22	(0.00)	0.22	(0.00)
AR(1)-3	-0.07	(0.00)	-0.07	(0.00)	-0.07	(0.00)
	Matriz Z					
Conversión	$\begin{bmatrix} 0.79 & -0.11 & -0.59 \\ -0.64 & -0.73 & -0.23 \\ 0.72 & -0.53 & 0.45 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} 0.13 & 0.21 & -0.97 \\ -0.02 & -0.99 & 0.09 \\ 0.96 & 0.15 & -0.22 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} -0.98 & 0.16 & -0.15 \\ 0.11 & -0.27 & 0.96 \\ -0.45 & -0.81 & -0.36 \end{bmatrix}$	
Factores						

Resultados - Modelos Factoriales: IGBVL, TC y Dow Jones

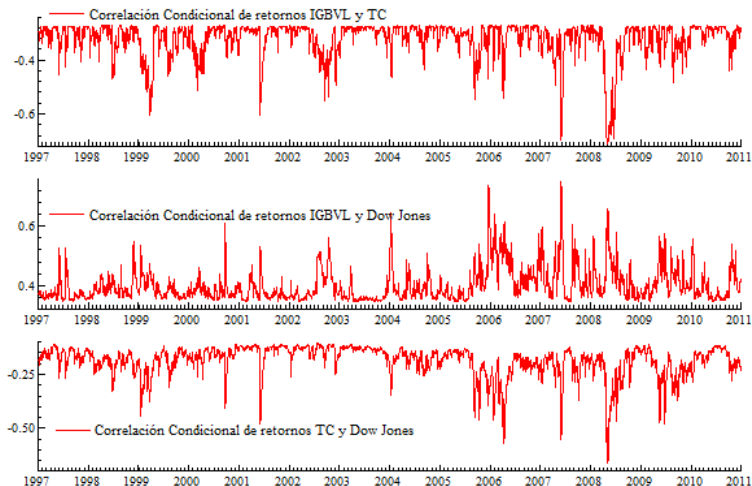
Modelos Factoriales: OGARCH, GOGARCH (2002) y GOGARCH NLS

Continuación Tabla 6. Modelos Factoriales- IGBVL, TC y DJ

	O-GARCH		GO-GARCH		GO-GARCH NLS	
Factores						
PC(1)						
ARCH	0.14	(0.00)	0.08	(0.00)	0.18	(0.00)
GARCH	0.83	(0.00)	0.91	(0.00)	0.78	(0.00)
PC(2)						
ARCH	0.09	(0.00)	0.18	(0.00)	0.09	(0.00)
GARCH	0.89	(0.00)	0.82	(0.00)	0.89	(0.00)
PC(3)						
ARCH	0.12	(0.00)	0.19	(0.00)	0.16	(0.00)
GARCH	0.86	(0.00)	0.77	(0.00)	0.83	(0.00)
Log Likelihood	-9646		-8842		-9131	
Akaike	5.55		5.09		5.25	
Schwarz	5.56		5.11		5.28	

Resultados - Modelo GO-GARCH (2002): IGBVL, TC y Dow Jones

Correlaciones Condicionales de los Retornos



Conclusiones

- La metodología aplicada permite evaluar movimientos conjuntos de múltiples variables y sus volatilidades.
- Existe una correlación negativa entre los retornos del tipo de cambio y del IGBVL: mayores retornos de la Bolsa mientras hay mayor apreciación del sol
- Intensificación de esta correlación negativa a partir del 2008. Fundamentos de flujos de capital hacia la Bolsa como la economía en general.
- Varianzas condicionales de ambos retornos se siguen. La volatilidad de ambas tiene fundamentos similares: ruido político, condiciones macroeconómicas.
- Correlación condicional de los retornos se intensifica en períodos de alta volatilidad hasta finales del 2008.
- El uso de la metodología puede incluir sistemas de muchas más variables. Uso en modelos de medición de riesgo y de valuación de activos.